UNIVERSIDAD DE BUENOS AIRES
Facultad de Ciencias Exactas y Naturales
Departamento de Matemática

Teoría de descenso y formas bilineales invariantes de álgebras de Lie de dimensión infinita

Tesis presentada para optar al título de Doctor de la Universidad de Buenos Aires en el área Ciencias Matemáticas

Claudia Sepp

Directores de tesis: Jorge Devoto
Arturo Pianzola

Consejero de estudios: Fernando Cukierman

Lugar y fecha de defensa: Buenos Aires, 29 de septiembre de 2015

Teoría de descenso y formas bilineales invariantes de álgebras de Lie de dimensión infinita

Resumen

La existencia de formas bilineales invariantes no degeneradas es una de las herramientas más importantes para el estudio de las álgebras de Lie de Kac-Moody y de las álgebras extendidas afines. En la práctica, estas formas se crean, se demuestra que existen en una base ad hoc, o simpemente se asumen. El propósito de este trabajo es describir la naturaleza de los espacios de formas bilineales invariantes de ciertas álgebras dadas por descenso fielmente playo (que incluye las álgebras afines de Kac Moody, las álgebras de Azumaya y las álgebras de multilazos) en un marco functorial. Esto nos permite concluir la existencia, unicidad y naturaleza de formas bilineales invariantes para varias clases importantes de álgebras.

Palabras Clave: Formas bilineales invariantes, Descenso fielmente playo, Descenso de Galois, Functor estable por cambio de base, Formas torcidas, Álgebras de Lie de dimensión infinita, Álgebras de Multilazos.

Descent theory and invariant bilinear forms of infinite-dimensional Lie algebras

Abstract

The existence of nondegenerate invariant bilinear forms is one of the most important tools in the study of Kac-Moody Lie algebras and extended affine Lie algebras. In practice, these forms are created, or shown to exist, either by assumption or in an ad hoc basis. The purpose of this work is to describe the nature of the space of invariant bilinear forms of certain algebras given by faithfully flat descent (which includes the affine Kac-Moody Lie algebras, as well as Azumaya algebras and multiloop algebras) within a functorial framework. This will allow us to conclude the existence, uniqueness and nature of invariant bilinear forms for many important classes of algebras.

Keywords: Invariant bilinear form, Faithfully flat descent, Galois descent, Functors stable under base change, Twisted form, Infinite-dimensional Lie algebras, Multiloop algebras.

Agradecimientos

A Arturo Pianzola, por la paciencia y dedicación. Sin su ayuda esta tesis no hubiese sido posible.

A Jorge Devoto y Fernando Cukierman por aceptarme conociendome muy poco y por guiarme dentro de exactas.

A Daniel Prelat, por convencerme de hacer la Licenciatura en Matemática y acompañarme de ahí en adelante.

A N.H Guersenzvaig, porque fue el que me mostró que la matemática no estaba toda hecha y me motivó para “hacer más”.

A Nicolás Andruskiewitsch, Vyacheslav Futorny y Andrea Solotar por aceptar ser jurado de esta tesis.

Al Conicet, por el apoyo económico y a la Universidad CAECE por darme un lugar para trabajar.

A todos los compañeros de estudio que tuve, especialmente Carlos (que fue el primero) y a Matías (que es el que más me acompañó durante la tesis).

A Leo, por estar, por soportarme, por motivarme y por ayudarme a crear y a criar a Milena y a Lucía.

Índice

Capítulo 1

Introducción

El objetivo general del presente trabajo es describir formas bilineales invariantes en álgebras obtenidas mediante técnicas de descenso fielmente playo. La motivación de este problema está dada por las álgebras de Kac-Moody afines y, más generalmente, por las llamadas álgebras afines extendidas (EALAs por sus siglas en inglés), que han jugado un papel fundamental en la Física teórica y la Matemática de las últimas tres décadas. La existencia de una forma bilineal invariante no degenerada es una de las herramientas más importantes para el estudio de dichas álgebras. Por ejemplo, un ingrediente para el estudio de las álgebras de Lie de Kac-Moody es el operador Casimir (generalizado). La existencia de este operador se basa en la existencia de una forma bilineal, simétrica, invariante no degenerada en el álgebra. Las álgebras que la admiten se llaman simetrizables y el principal ejemplo está dado por las álgebras afines de Kac-Moody.

En la práctica, la existencia de estas formas se demuestra en una base ad hoc, o bien, directamente se asume. La idea es poder describir la naturaleza del espacio de formas bilineales invariantes de ciertas álgebras, dadas por descenso fielmente playo, desde un marco functorial, con el fin de concluir su existencia y naturaleza en varios casos de interés.

Es sabido ([Pi1]) que las álgebras afines son precisamente las formas torcidas (dadas por descenso galoisiano, por lo tanto fielmente playo) de álgebras afines de lazos, es decir de la forma $\mathfrak{g} \otimes_k k[t^{\pm 1}]$ donde $\mathfrak{g}$ es un álgebra de Lie simple, de dimensión finita sobre un cuerpo algebraicamente cerrado k de característica 0. Con esa motivación es que se establece la descripción explícita del espacio de formas invariantes de una clase de álgebras dadas por descenso fielmente playo. Para mayor flexibilidad en las aplicaciones consideramos una k-álgebra A (donde k puede ser un cuerpo, o más generalmente un anillo asociativo, conmutativo con unidad) y R es una k–álgebra conmutativa, asociativa con unidad, que es k-módulo playo y B es una forma torcida de $A \otimes_k R$, es decir B es una R-álgebra tal que $B \otimes_R S \simeq A \otimes_k S$ como S-álgebras para alguna extensión fielmente playa S/R. Es así que las técnicas desarrolladas no solo tendrán aplicación a las álgebras de Lie, sino a otras clases de álgebras, de las que tendremos como ejemplo las unitarias y las álgebras de Azumaya.

Para ilustrar un poco más estas ideas, veamos brevemente el caso de las álgebras de Kac-Moody afines sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado de característica 0. Sea $\widehat{\mathcal{L}}$ una de esas álgebras, y sea $\mathcal{L}$ el álgebra derivada de $\widehat{\mathcal{L}}$, módulo su centro. Esta álgebra de Lie $\widehat{\mathcal{L}}$ puede ser recuperada desde $\mathcal{L}$ (tomando la extensión central universal y acoplando una derivación), lo que nos permite concentrarnos en el álgebra de Lie $\mathcal{L}$ misma. Recordemos que el centroide de $\mathcal{L}$ es el subanillo $\mathrm{Ctd}_k(\mathcal{L}) \subset \mathrm{End}_k(\mathcal{L})$ compuesto de elementos que conmutan con el corchete de Lie de $\mathcal{L}$. La k-álgebra de Lie $\mathcal{L}$ es de dimensión infinita, pero viendo a $\mathcal{L}$ como un álgebra sobre su centroide de manera natural, nos encontramos nuevamente en el mundo finito: existe una álgebra de Lie simple de dimensión finita $\mathfrak{g}$, y una extensión finita de Galois S de $\mathrm{Ctd}_k(\mathcal{L})$, tal que $\mathcal{L} \otimes_{\mathrm{Ctd}_k(\mathcal{L})} S$ y $\mathfrak{g} \otimes_k S$ son isomorfas como S–álgebras de Lie. Acá el centroide puede identificarse con el anillo de polinomios de Laurent $k[t^{\pm 1}]$, y podemos tomar $S = k[t^{\pm 1/m}]$.

Más generalmente, podemos tomar $\widehat{\mathcal{L}}$ como una EALA y $\mathcal{L}$ su coro sin centro. Esta es una clase de álgebra de Lie de dimensión infinita que fue explorada en [AABGP], [GP], [Ne1], [Ne2] y [Ne3]. Los centroides son ahora anillos de polinomios de Laurent $R_n = k[t_1^{\pm 1}, \cdots t_n^{\pm 1}]$ en un numero finito n de variables (conocido como la *nulidad* de $\mathcal{L}$). Como en el caso de las álgebras afines de Kac-Moody, las álgebras resultantes $\mathcal{L}$ son formas torcidas de álgebras de la forma $\mathfrak{g} \otimes_k R_n$. En nulidad 1 recuperamos la teoría de las álgebras de Kac-Moody afines.

La técnica que usamos para describir la naturaleza de las formas bilineales se basa en dos ingredientes principales:

- El hecho que las formas bilineales son de alguna manera “functoriales” y que este functor es representable.
- La Teoría de Descenso.

Esto nos lleva a estudiar, en primer lugar, la teoría de descenso, con una sección dedicada a descenso de ciertos functores, que tiene interés independiente. A continuación aplicamos esta teoría al functor **IBF** que respresenta las formas bilineales invariantes, para luego aplicarla al caso particular de álgebras de Lie (de dimensión infinita). Más específicamente la organización de la tesis es la siguiente:

En el Capítulo 2 introduciremos los conceptos preliminares necesarios para el desarrollo de la tesis. Se supondrá conocida la teoría básica del álgebra conmutativa, que puede estudiarse en [B:A] y [B:AC]. Igualmente, a fin de mencionarlos, empezamos recordando ciertos resultados. En la siguiente sección introducimos el concepto de

Módulos Fielmente Playos y *Extensiones de Anillos Fielmente Playas* y demostramos los resultados que utilizaremos en los siguientes capítulos. Seguimos con las *Extensiones de Galois de Anillos* e identificamos como tal a nuestro principal ejemplo: la extensión de polinomios de Laurent de varias variables S/R donde

$$R = k[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_n^{\pm 1}] \subset S = k[t_1^{\pm \frac{1}{m_1}}, \ldots, t_n^{\pm \frac{1}{m_n}}]$$

En este mismo capítulo introducimos también otros conceptos necesarios para el trabajo, como los centroides y el functor **Aut**.

En el Capítulo 3 desarrollamos la Teoría de Descenso para extensiones fielmente playas de anillos. No existe en este momento una bibliografía que exprese de manera detallada por qué el caso de descenso galoisiano es un caso particular del caso de descenso fielmente playo, por lo que tenemos una sección dedicada a este tema. Es en otra sección de este mismo capítulo donde introducimos el concepto de functores estables por cambio de base y sus propiedades en cuanto al descenso. El principal resultado de este capítulo es el Teorema 3.6.7, en el cual se demuestra que los functores de la categoría de álgebras a la categoría de módulos que son estables por cambio de base preservan formas. Si bien la motivación original de este tema fue aplicarlo al estudio de formas bilineales invariantes en el capítulo 5, trabajamos con un contexto lo suficientemente amplio para que tenga interés propio.

En el Capítulo 4 vemos una aplicación de la Teoría de Descenso al Módulo de Diferenciales de Kähler, en particular a los invariantes por cierta acción del grupo Γ de una extensión de Galois S/R. Este resultado es de suma importancia en el trabajo [PPS] que será la primera continuación natural de esta tesis.

En el Capítulo 5 introducimos las Funciones Bilineales Invariantes y las estudiamos desde una perspectiva functorial. Dado el espacio $\mathrm{IBF}_{(R,k)}(B;V)$ de funciones bilineales invariantes $B \times B \to V$ (donde V es un k-módulo), definimos $\mathbf{IBF}_R(B)$ como el cociente del R-módulo $B \otimes_R B$ por el submódulo $\mathrm{Span}_R\{ab \otimes c - a \otimes bc,\ ab \otimes c - b \otimes ca : a, b, c \in B\}$ y obtenemos un k-isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_k(\mathbf{IBF}_R(B), V) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{IBF}_{(R,k)}(B;V)$$

En otras palabras, se concluye que $\mathbf{IBF}_R(B)$ representa el functor de k-módulos $\mathrm{IBF}_{(R,k)}(B;-)$. En la siguiente sección identificamos como functor (de ciertas categorías definidas en el Capítulo 3, estable por cambio de base) a $\mathbf{IBF}_-(-)$ y estudiamos sus propiedades.

Luego pasamos al tema principal de estudio: el descenso de las funciones bilineales invariantes. Trabajando en el caso que A es una k-álgebra y B es una S/R-forma torcida de $A \otimes_k R$ tal que R/k es playo y S/R es una extensión fielmente playa, nos interesará ver qué podemos decir de las formas bilineales de B, conociendo las formas bilineales de A.

Dado un elemento κ_A de $\mathrm{IBF}_k(A,k)$ con ciertas condiciones,[1] tenemos una forma natural de construir un elemento κ_B de $\mathrm{IBF}_R(B,R)$ y concluir qué propiedades cumple κ_B, a partir de las que cumple κ_A. Ahora bien, nos interesan las formas bilineales de $B \times B$ en k (o en cualquier k-módulo V). Esta forma κ_B será crucial para terminar de caracterizar por completo $\mathrm{IBF}_{(R,k)}(B;V)$. Los temas de este capítulo fueron publicados en el trabajo [NPPS].

El Capítulo 6 está dedicado a las aplicaciones del Capítulo 5. El principal caso de interés (que da título a la tesis y que motivó el problema) será el ya mencionado en el que k es un cuerpo de característica 0, $A = \mathfrak{g}$ es una k-álgebra de Lie semisimple de dimension finita y B es una forma torcida de $\mathfrak{g} \otimes_k R$. (Cuando además k es algebraicamente cerrado, $\mathfrak{g}$ es simple y R es el anillo de polinomios de Laurent $k[t_1^{\pm 1}, \ldots, t_n^{\pm 1}]$, recuperamos el ejemplo de álgebra de multilazos). En este caso, la forma de Killing de $\mathfrak{g}$ es no singular y cumple las invariancias necesarias para definir naturalmente un elemento κ_B, que además coincide con la forma de Killing de la R-álgebra de Lie B (que existe, porque B es R-módulo proyectivo de rango constante). Agregando las hipótesis de central y simple sobre $\mathfrak{g}$, llegamos a que $\mathrm{IBF}_R(B,R)$ es un R-módulo libre de rango 1, que admite como base a κ_B y que $\mathbf{IBF}_R(B) \simeq R$, con un isomorfismo de R-módulos $\mathbf{IBF}_R(B) \to R$ dado por $\overline{b \otimes b'} \mapsto \kappa_B(b,b')$. Para este capítulo suponemos conocido los conceptos básicos de álgebras de Lie que pueden leerse en [H].

Además, para mostrar la generalidad con la que se abordó el tema, se muestra la aplicación a las álgebras unitarias (álgebras no necesariamente asociativas, que tienen 1) y a las álgebras de Azumaya de rango constante. En este último caso k es un anillo, R es una k-álgebra que es k-módulo playo y S/R es una extensión fielmente playa. Si consideramos $A = M_n(k)$, nuestra S/R forma B de $M_n(k) \otimes_k R \simeq M_n(R)$ es un álgebra de Azumaya de rango constante n^2. A partir la forma bilineal invariante natural de A que es

$$\kappa_A(x,y) = tr(xy)$$

es que se obtiene que la restricción de la forma $\kappa_{M_n(S)}$ a B es una forma bilineal, invariante no singular, que es base de $\mathrm{IBF}_R(B)$. El abordaje expuesto es solo como ejemplo breve para ilustrar otras aplicaciones de la teoría, el lector interesado puede recurrir a [KO].

Finalmente, en el Capítulo 7 se muestra una versión graduada del principal teorema del Capítulo 6, enfocado directamente a las álgebras de Lie. La necesidad de considerar formas invariantes graduadas proviene del estudio de las EALAs. El principal teorema de este capítulo establece que en las álgebras de multilazos existe

[1] Referidas a la invariancia por automorfismos de extensiones de κ_A

una única (salvo factor escalar) forma bilineal invariante graduada, que resulta no degenerada.

Capítulo 2

Preliminares

A lo largo del trabajo, si no se especifica de otra manera, k será un anillo conmutativo, asociativo, con 1 y denotamos k-**alg** a la categoría de k-álgebras asociativas, conmutativas con 1, donde las flechas son los morfismos k-lineales de álgebras con 1 y por $R \in k$-**alg** entendemos que R es un objeto de k-**alg**. Por definición, R viene acompañado de un morfismo de anillos $\sigma_{R,k} : k \to R$. Como R es un anillo conmutativo, tendremos también la categoría R-**alg**. Un objeto $S \in R$-**alg** será visto como un objeto de k-**alg** vía $\sigma_{S,k} = \sigma_{S,R} \circ \sigma_{R,k}$. Las flechas de R-**alg** son entonces flechas de k-**alg** y tenemos de manera natural un functor de olvido de R-**alg** $\to$ k-**alg**. Por definición, $S \in R$-**alg** significa que S/R es una extensión de anillos o de k-álgebras.

2.1 Resultados de álgebra conmutativa

Tal como se mencionó en la introducción, damos por supuesto los resultados básicos de álgebra conmutativa, que pueden leerse en [B:A] y [B:AC]. Igualmente empecemos por recordar algunas propiedades que utilizaremos frecuentemente.

Proposición 2.1.1. *Sea R/S una extensión de anillos conmutativos con identidad y sean M, M' dos R-módulos. Entonces existe un isomorfismo canónico de S-módulos*
(2.1.1)
$(M \otimes_R S) \otimes_S (M' \otimes_R S) \to (M \otimes_R M') \otimes_R S$ *tal que* $(x \otimes 1_S) \otimes (x' \otimes 1_S) \mapsto (x \otimes x') \otimes 1_S$

Demostración. Ver [B:A, Capítulo II, §5.1 Proposición 3] $\square$

Proposición 2.1.2. *Sea R/S una extensión de anillos conmutativos con identidad y sea M un R-módulo. Entonces existe un morfismo de S-módulos*

$$\omega : \mathrm{Hom}_R(M, R) \otimes_R S \to \mathrm{Hom}_S(M \otimes_R S, S)$$

tal que para $\phi \in \mathrm{Hom}_R(M, R)$

$$\omega(\phi \otimes 1) = \phi \otimes \mathrm{Id}_S$$

y si S *es* R*-módulo playo y* M *es finitamente generado (respectivamente finitamente presentado), entonces* ω *es un monomorfismo (respectivamente isomorfismo).*

Demostración. Ver [B:AC, Capítulo I, §2.10] $\square$

2.2 Extensiones fielmente playas

En esta sección introducimos el concepto de módulos fielmente playos y luego de extensiones de anillos fielmente playas, que será la condición fundamental en la teoría de descenso. Para la definición empecemos por la siguiente proposición:

Proposición 2.2.1. *Sea* R *un anillo conmutativo con* 1 *y sea* M *un* R*-módulo. Las siguientes proposiciones son equivalentes:*

(i) La sucesión $N' \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} N''$ *de* R*-módulos es exacta si y solo si la sucesión* $M \otimes N' \xrightarrow{\mathrm{Id}_M \otimes u} M \otimes N \xrightarrow{\mathrm{Id}_M \otimes v} M \otimes N''$ *lo es.*

(ii) M *es playo y para todo* R*-módulo* N*,* $M \otimes_R N = 0$ *implica* $N = 0$*.*

(iii) M *es playo y para todo morfismo* $u : N' \to N$ *de* R*-módulos,* $\mathrm{Id}_M \otimes u = 0$ *implica* $u = 0$*.*

Demostración. En $(i) \Rightarrow (ii)$ la parte playo es directa, por hipótesis. Sea ahora N un R-módulo tal que $M \otimes_R N = 0$, entonces la sucesión $0 \to M \otimes N \to 0$ es exacta. Por hipótesis $0 \to N \to 0$ es exacta, es decir $N = 0$.

Para $(ii) \Rightarrow (iii)$, sea $u : N' \to N$ morfismo de R-módulos tal que $\mathrm{Id}_M \otimes u = 0$. Si llamamos I a la imagen de u, resulta que la imagen de $\mathrm{Id}_M \otimes u$ es $M \otimes I = 0$. Entonces, por hipótesis $I = 0$ y así $u = 0$.

Veamos ahora $(iii) \Rightarrow (i)$. La ida vale, por ser M playo. Recíprocamente, si

$$M \otimes N' \xrightarrow{\mathrm{Id}_M \otimes u} M \otimes N \xrightarrow{\mathrm{Id}_M \otimes v} M \otimes N''$$

es exacta, tenemos que $\mathrm{Id}_M \otimes (v \circ u) = (\mathrm{Id}_M \otimes v) \circ (\mathrm{Id}_M \otimes u) = 0$, con lo cual $v \circ u = 0$ por hipótesis. Llamando $I = \mathrm{Im}(u)$ y $K = \mathrm{Ker}(v)$, vimos que $I \subset K$. Para la otra inclusión, consideramos la sucesión exacta corta

$$0 \to I \xrightarrow{i} K \xrightarrow{p} K/I \to 0$$

Como M es playo la sucesión

$$0 \to M \otimes I \xrightarrow{\mathrm{Id}_M \otimes i} M \otimes K \xrightarrow{\mathrm{Id}_M \otimes p} M \otimes (K/I) \to 0$$

también es exacta, entonces aplicando el teorema de isomorfismo a $\mathrm{Id}_M \otimes p$ obtenemos $(M \otimes K)/\operatorname{Ker}(\mathrm{Id}_M \otimes p) \simeq M \otimes (K/I)$. Pero $\operatorname{Ker}(\mathrm{Id}_M \otimes p) = \operatorname{Im}(\mathrm{Id}_M \otimes i) = M \otimes I = \operatorname{Im}(\mathrm{Id}_M \otimes u)$ y $M \otimes K = \operatorname{Ker}(\mathrm{Id}_M \otimes v)$, que son iguales porque la sucesión dada es exacta, entonces

$$(M \otimes K)/(M \otimes I) \simeq M \otimes (K/I) = 0$$

Así $\mathrm{Id}_M \otimes p : M \otimes K \to M \otimes (K/I)$ es la función nula, con lo cual por hipótesis $p = 0$, entonces $K/I = 0$, es decir $K = I$, completando que la sucesión

$$N' \xrightarrow{u} N \xrightarrow{v} N''$$

es exacta. □

Definición 2.2.2 (Módulos fielmente playos y Extensiones de Anillos Fielmente Playas). Un R-módulo M es *fielmente playo*, si cumple alguna de las condiciones equivalentes de la Proposición 2.2.1. Dada una R-álgebra S, decimos que es un álgebra fielmente playa si y solo si S es un R-módulo fielmente playo. Esto mismo también lo expresaremos diciendo que la extensión de anillos S/R es fielmente playa.

Observación 2.2.3. Trabajando apropiadamente la condición (i) en la definición, es evidente que si M es R-módulo fielmente playo, dado $u : N' \to N$ morfismo de R-módulos, u es inyectiva (resp. sobreyectiva y biyectiva) si y solo si $\mathrm{Id}_M \otimes u : M \otimes N' \to M \otimes N$ lo es.

Proposición 2.2.4. *Sea R un anillo conmutativo con 1 y sea M un R-módulo. M es un R-módulo fielmente playo si y solo si es playo y para cada ideal maximal $\mathfrak{m}$ de R se verifica que $\mathfrak{m}M \neq M$.*

Demostración. Veamos la equivalencia con la condición (ii) de la Proposición 2.2.1. Supongamos primero que vale (ii). Como $R/\mathfrak{m} \neq 0$, resulta que

$$0 \neq M \otimes_R R/\mathfrak{m} \simeq M/\mathfrak{m}M$$

por lo que $\mathfrak{m}M \neq M$. Recíprocamente, dado N un R-módulo no nulo, existe un $x \in N$ no nulo y $Rx \simeq R/I$ donde I es el núcleo del morfismo de R-módulos $R \to Rx$ tal que $r \mapsto rx$. Como $I \subseteq \mathfrak{m}$ para algún ideal maximal $\mathfrak{m}$, por hipótesis $M \neq IM$, por lo tanto

$$0 \neq M/IM \simeq M \otimes_R R/I \simeq M \otimes_R Rx$$

Pero por ser M un R-módulo playo, podemos identificar $M \otimes_R Rx$ con un submódulo de $M \otimes_R N$, que será no nulo. □

La Proposición 2.2.1 nos da definiciones equivalentes para módulos fielmente playos, que valen en particular para extensiones de anillos, pero en este último caso tenemos otra definición equivalente que nos servirá más adelante.

Proposición 2.2.5. *Sea S/R una extensión de anillos. Es fielmente playa si y solo si S es R-módulo playo y para todo R-módulo N el morfismo $N \to N \otimes_R S$ tal que $x \mapsto x \otimes 1_S$ es inyectivo.*

Demostración. Si la extensión es fielmente playa, por definición S es R-módulo playo y si consideramos el morfismo $N \otimes_R S \to (N \otimes_R S) \otimes_R S$ dado por $x \otimes s \mapsto x \otimes 1 \otimes s$, es una sección, es decir existe la función $(N \otimes_R S) \otimes_R S \to N \otimes_R S$ dada por $x \otimes s \otimes t \mapsto x \otimes st$ tal que compuestas son la identidad de $N \otimes_R S$, por lo tanto es inyectiva. Ahora considerando la Observación 2.2.3 tenemos que el morfismo $N \to N \otimes_R S$ tal que $x \mapsto x \otimes 1_S$ es inyectivo.

Recíprocamente, veamos que se cumple la condición (ii) de la Proposición 2.2.1. Sea N un R-módulo tal que $N \otimes_R S = 0$. Por hipótesis $N \hookrightarrow N \otimes_R S = 0$ por lo que $N = 0$. □

De la proposición anterior se deduce rápidamente que en el caso de extensiones fielmente playas, podemos considerar R como subanillo de S.

Corolario 2.2.6. *Si S/R es una extensión fielmente playa, entonces $R \hookrightarrow S$.*

Demostración. La función $R \to R \otimes_R S \simeq S$ es inyectiva por la Proposición 2.2.5. □

Veamos una última condición suficiente para que una extensión de anillos sea fielmente playa[1].

Proposición 2.2.7. *Sea $\alpha : R \to S$ un morfismo de anillos tal que S es un R-módulo playo (con la acción dada por α). Si para cada $\mathfrak{m}$ ideal maximal de R existe $\mathfrak{n}$ ideal maximal de S tal que $\alpha^{-1}(\mathfrak{n}) = \mathfrak{m}$, entonces la extensión S/R es fielmente playa.*

Demostración. Para cada $\mathfrak{m}$ ideal maximal de R, tenemos que $\mathfrak{m}S \subseteq \mathfrak{n}$, por lo tanto $\mathfrak{m}S \neq S$. Entonces por la Proposición 2.2.4 resulta que S/R es una extensión playa. □

A continuación veamos un teorema que será fundamental en la Teoría de Descenso. Previamente vamos a fijar notaciones: si S/R es una extensión de anillos, denotemos $S'' = S \otimes_R S$ y consideremos las "proyecciones" en las coordenadas

$$p_1 : S \to S'' \quad p_1(s) = s \otimes 1 \qquad \text{y} \qquad p_2 : S \to S'' \quad p_2(s) = 1 \otimes s \tag{2.2.1}$$

[1] De hecho es condición necesaria y suficiente(ver [B:AC, Capítulo I, §3.5]), pero solo utilizaremos esta implicación.

Teorema 2.2.8. *Sea S/R una extensión fielmente playa y N un R-módulo. La imagen de N en $N \otimes_R S$ consiste en los elementos que tienen la misma imagen bajo* $\mathrm{Id}_N \otimes p_1$ *y* $\mathrm{Id}_N \otimes p_2$*, es decir*

$$N \simeq N \otimes_R 1_S = \{x \in N \otimes_R S : \mathrm{Id}_N \otimes p_1(x) = \mathrm{Id}_N \otimes p_2(x)\}$$

En particular, resulta que $R = \{s \in S : p_1(s) = p_2(s)\}$[2]

Demostración. [3] Sea

$$K = \{x \in N \otimes_R S : \mathrm{Id}_N \otimes p_1(x) = \mathrm{Id}_N \otimes p_2(x)\} \subseteq N \otimes_R S$$

Es fácil verificar que $N \otimes_R 1_S \subseteq K$. Para la otra inclusión, consideremos la función $f = \mathrm{Id}_N \otimes p_1(x) - \mathrm{Id}_N \otimes p_2(x)$, que cumple $K = \mathrm{Ker}(f)$. Como S es un R-módulo playo, $\mathrm{Ker}(f \otimes \mathrm{Id}_S) = K \otimes_R S$. Tomemos $x = \sum n_i \otimes s_i \otimes t_i \in K \otimes_R S = \mathrm{Ker}(f \otimes_R \mathrm{Id}_S)$. Como $(f \otimes_R \mathrm{Id}_S)(x) = 0$, tenemos que

$$\sum n_i \otimes 1_S \otimes s_i \otimes t_i = \sum n_i \otimes s_i \otimes 1_S \otimes t_i$$

Sea $h : N \otimes_R S \otimes_R S \otimes_R S \to N \otimes_R S \otimes_R S$ el morfismo tal que $h(n \otimes s \otimes t \otimes u) = n \otimes s \otimes tu$. (Es fácil verificar la existencia, partiendo de la función 4-lineal y R-balanceada $h_0 : N \times S \times S \times S \to N \otimes_R S \otimes_R S$ tal que $h_0(n, s, t, u) = n \otimes s \otimes tu$). Si aplicamos h a ambos miembros tenemos:

$$\sum n_i \otimes 1_S \otimes s_i t_i = \sum n_i \otimes s_i \otimes t_i$$

Como el segundo miembro es x, tenemos que $x \in N \otimes_R 1_S \otimes_R S$, con lo cual $K \otimes_R S \subseteq N \otimes_R 1_S \otimes_R S$, y así $K \otimes_R S = N \otimes_R 1_S \otimes_R S$. Ahora bien,

$$0 = (K \otimes_R S)/(N \otimes_R 1_S \otimes_R S) \simeq (K/(N \otimes_R 1_S)) \otimes_R S$$

entonces, por ser S/R fielmente playa, resulta que $K/(N \otimes_R 1_S) = 0$, es decir $K = N \otimes_R 1_S$. $\square$

Observación 2.2.9. Si llamamos $\alpha : R \to S$ al morfismo de estructura de S como R-álgebra, podemos ver S'' como R-álgebra vía $p_1 \otimes \alpha$ o bien vía $p_2 \otimes \alpha$, pero por el teorema anterior resulta la misma estructura, si S/R es una extensión fielmente playa.

[2]Recordemos que es posible identificar R con un subanillo de S en virtud de 2.2.6.

[3]La demostración sigue [KO, Capítulo 2, proposición 2.1] o [W, Capítulo 12, Teorema 13.1].

2.3 Extensiones de Galois

En esta sección presentamos las extensiones de Galois de anillos, que serán un caso particular de las extensiones fielmente playas.

Definición 2.3.1 (Extensiones de Galois). Sea $S \in R$-**alg** y Γ un grupo finito de R-automorfismos de S. Decimos que R es una extensión de Galois con grupo Γ si S es una R-álgebra fielmente playa y el morfismo

$$\phi : S \otimes_R S \to \underbrace{S \times S \times \ldots \times S}_{|\Gamma| \text{ veces}} \text{ dado por } \phi(s \otimes t) = (\gamma(s)t)_{\gamma \in \Gamma} \tag{2.3.1}$$

es un isomorfismo.

Proposición 2.3.2. *Sea S/R extensión de Galois con grupo Γ. El conjunto de invariantes de S por Γ*

$$S^\Gamma = \{s \in S : \gamma(s) = s \ \forall \gamma \in \Gamma\}$$

es exactamente R.

Demostración. Por el Teorema 2.2.8 sabemos que $R = \{s \in S : p_1(s) = p_2(s)\}$. Como ϕ es un isomorfismo este conjunto será

$$\begin{aligned} R = \{s \in S : \phi(p_1(s)) = \phi(p_2(s))\} &= \{s \in S : (s, s, \ldots, s) = (\gamma_1(s), \gamma_2(s), \ldots, \gamma_{|\Gamma|}(s))\} \\ &= \{s \in S : \gamma(s) = s \ \forall \gamma \in \Gamma\} = S^\Gamma \end{aligned}$$

□

Si bien la definición dada para extensiones de Galois de anillos es la que vamos a usar en la teoría de descenso, cabe mencionar otras definiciones equivalentes, siguiendo las ideas de [CHR]. A tal fin definamos y fijemos notación de las herramientas necesarias:

Definición 2.3.3 ($S * \Gamma$ y el morfismo j). Sea $S \in R$-**alg** y Γ un grupo finito de R-automorfismos de S. Definimos $S * \Gamma$ como la S-álgebra del grupo Γ donde

$$S * \Gamma = \bigoplus_{\gamma \in \Gamma} S\nu_\gamma$$

con la multiplicación $s\nu_\gamma t\nu_\mu = s\gamma(t)\nu_{\gamma\mu}$ para $s, t \in S$ y $\gamma, \mu \in \Gamma$. Consideraremos el morfismo de S-álgebras

$$j : S * \Gamma \to \mathrm{End}_R(S) \quad j(s\nu_\gamma)(t) = s\gamma(t) \tag{2.3.2}$$

También necesitaremos el siguiente lema:

Lema 2.3.4. *Sea M un R-módulo. M es proyectivo y finitamente generado si y solo si existe una familia finita $(x_i)_i \in I$ de elementos de M y morfismos de R-módulos $f_i : M \to R$ tal que para cada $x \in M$*

$$x = \sum_{i \in I} f_i(x) x_i$$

Demostración. Por un lado, por ser M proyectivo, es sumando directo de un libre, es decir existe un R-módulo libre F tal que $F = M \oplus Q$, para algún otro R-submódulo Q. Digamos que F tiene base $\{e_i\}$, donde cada $e_i = x_i + q_i$ para ciertos $x_i \in M$ y $q_i \in Q$. Si consideramos las proyecciones $\pi_i : F \to R$ en cada coordenada y tomamos $f_i = \pi_i|_M$, podemos escribir cada $x \in M$ en la base como $x = \sum_i \pi_i(x) e_i$. Ahora bien,

$$x = \sum_i \pi_i(x) e_i = \sum_i f_i(x)(x_i + q_i) = \sum_i f_i(x) x_i + \sum_i f_i(x) q_i$$

como el segundo término de la suma está en $M \cap Q = 0$, resulta $x = \sum_i f_i(x) x_i$. Finalmente, por ser finitamente generado, solo tendremos una familia finita.

Recíprocamente, consideremos el R-módulo libre F con base $\{e_i\}_{i \in I}$ (donde I es finito por hipótesis) y los morfismos

$$\pi : F \to M \qquad \pi(e_i) = x_i$$

$$i : M \to F \qquad i(x) = \sum_{i \in I} f_i(x) x_i$$

Como $\pi \circ i = \mathrm{id}_M$, resulta que $F = M \oplus \mathrm{Ker}(\pi)$, por lo que M es proyectivo y finitamente generado. $\square$

Teorema 2.3.5 (Definiciones equivalentes de extensión de Galois). *Sea S un anillo conmutativo, Γ un grupo finito de automorfismos de S y sea $R = S^\Gamma$. Entonces las siguientes proposiciones son equivalentes.*

(i) Existen $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in S$ tal que $\sum_{i=1}^n x_i \gamma(y_i) = \delta_{\gamma, \mathrm{id}}$ para todo $\gamma \in \Gamma$

(ii) S es finitamente generado y proyectivo como R-módulo y (2.3.2) es un isomorfismo.

(iii) El morfismo (2.3.1) es un isomorfismo.

(iv) Para todo $\mathfrak{m}$ ideal maximal de S y para todo $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq \mathrm{id}$, existe $s \in S$ tal que $\gamma(s) - s \notin \mathfrak{m}$.

Demostración. $(i) \Rightarrow (ii)$ Para la parte de proyectivo y finitamente generado vamos a usar el Lema 2.3.4. Tomemos los x_i del Lema como los x_i de la hipótesis (i) y las funciones $f_i : S \to R$ definidas como $f_i(s) = \sum_{\gamma\in\Gamma} \gamma(sy_i)$, para los y_i de la hipótesis. Ciertamente para cada $s \in S$ se cumple que $f_i(s) \in R = S^\Gamma$, porque si $\sigma \in \Gamma$, tenemos que $\sigma(f_i(s)) = \sum_{\gamma\in\gamma} \sigma(\gamma(sy_i)) = f_i(s)$. Además

$$\sum_{i\in I} f_i(s)x_i = \sum_{i\in I}\sum_{\gamma\in\Gamma} \gamma(sy_i)x_i = \sum_{\gamma\in\Gamma} \overbrace{\Big(\sum_{i\in I}\gamma(y_i)x_i\Big)}^{\delta_{\mathrm{id},\gamma}}\gamma(s) = s$$

Veamos ahora que (2.3.2) es isomorfismo. Claramente es monomorfismo, pues dados $\gamma, \sigma \in \Gamma$, si para todo $s \in S$ resulta que $j(\nu_\gamma)(s) = j(\nu_\sigma)(s)$ es que $\gamma(s) = \sigma(s)$ para todo $s \in S$, es decir $\gamma = \sigma$. Para ver que es epimorfismo, sea $f \in \mathrm{End}_R(S)$, buscamos un $z \in S * \Gamma$ tal que $j(z) = f$. Para cada $\gamma \in \Gamma$ definamos $s_\gamma = \sum_{i\in I} f(x_i)\gamma(y_i)$. Para $z = \sum_{\gamma\in\Gamma} s_\gamma\nu_\gamma$ y $s \in S$ tenemos que:

$$f(s) = f\big(\sum_{i\in I}\sum_{\gamma\in\Gamma} x_i\gamma(y_i)\gamma(s)\big)$$

$$\begin{aligned} j(z)(s) &= j\big(\sum_{\gamma\in\Gamma} s_\gamma\nu_\gamma\big)(s) = \sum_{\gamma\in\Gamma} s_\gamma\gamma(s) = \sum_{\gamma\in\Gamma}\sum_{i\in I} f(x_i)\gamma(y_i)\gamma(s) \\ &= \sum_{i\in I} f(x_i)\underbrace{\sum_{\gamma\in\Gamma}\gamma(y_is)}_{\in R} = f\Big(\sum_{i\in I}\sum_{\gamma\in\Gamma} x_i\gamma(y_i)\gamma(s)\Big) = f\Big(\sum_{\gamma\in\Gamma}\underbrace{\sum_{i\in I} x_i\gamma(y_i)}_{\delta_{\mathrm{id},\gamma}}\gamma(s)\Big) \\ &= f(s) \end{aligned}$$

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Llamemos $E = \{\varphi : \Gamma \to S\}$, que es anillo con el producto y la suma coordenada a coordenada. Claramente es isomorfo a $S \times \ldots \times S$ considerando la función que asigna a cada elemento $(s_\gamma)_{\gamma\in\Gamma} \mapsto \varphi$ tal que $\varphi(\gamma) = s_\gamma$. E es un Γ-módulo vía

$$(\gamma \cdot \varphi)(\tau) = \gamma\big(\varphi(\gamma^{-1} \circ \tau)\big)$$

Además cumple que

$$\gamma \cdot s\varphi = \gamma(s)(\gamma \cdot \varphi) \tag{2.3.3}$$

pues

$$(\gamma \cdot s\varphi)(\tau) = \gamma\big(s\varphi(\gamma^{-1} \circ \tau)\big) = \gamma(s)\gamma\big(\varphi(\gamma^{-1} \circ \tau)\big) = \gamma(s)(\gamma \cdot \varphi)(\tau)$$

Calculemos ahora sus puntos fijos:

$$\begin{aligned}\varphi \in E^\Gamma &\Leftrightarrow \forall\, \gamma \in \Gamma,\ \gamma \cdot \varphi = \varphi \\ &\Leftrightarrow \forall\, \gamma \in \Gamma,\ \forall\, \tau \in \Gamma,\ \gamma \cdot \varphi(\tau) = \varphi(\tau) \\ &\Leftrightarrow \forall\, \gamma \in \Gamma,\ \forall\, \tau \in \Gamma,\ \gamma\big(\varphi(\gamma^{-1} \circ \tau)\big) = \varphi(\tau) \\ &\Leftrightarrow \forall\, \gamma \in \Gamma,\ \forall\, \tau \in \Gamma,\ \varphi(\gamma^{-1} \circ \tau)\big) = \gamma^{-1}\big(\varphi(\tau)\big)\end{aligned}$$

por lo que

$$E^\Gamma = \{\varphi \in E : \varphi(\gamma \circ \tau) = \gamma\big(\varphi(\tau)\big)\} \tag{2.3.4}$$

Empecemos por plantear el isomorfismo de R-módulos $\lambda : S \to E^\Gamma$ $\lambda(s)(\gamma) = \gamma(s)$. Está bien definida (en el sentido que el codominio es el apropiado), pues $\lambda(s)(\gamma \circ \tau) = \gamma(\tau(s)) = \gamma\big(\lambda(s)(\tau)\big)$ (ver (2.3.4)). Es claramente un monomorfismo, pues si $\lambda(s) = \lambda(t)$, para $\gamma = \mathrm{id}$ resulta $s = t$. También es epimorfismo, porque dado $\varphi \in E^\Gamma$, para $s = \varphi(\mathrm{id})$ tenemos que para todo $\gamma \in \Gamma$

$$\lambda(s)(\gamma) = \gamma(s) = \gamma(\varphi(\mathrm{id})) =^{(2.3.4)} \varphi(\gamma \circ \mathrm{id}) = \varphi(\gamma)$$

λ induce el isomorfismo de S-módulos $\lambda \otimes \mathrm{id}_S : S \otimes_R S \to E^\Gamma \otimes_R S$.

Por otro lado, existe un morfismo de S-módulos $\rho : E^\Gamma \otimes_R S \to E$ tal que $\rho(\varphi \otimes s) = s\varphi$. Para ver que es un isomorfismo, busquemos una inversa. Por hipótesis, S es finitamente generado y proyectivo, así que por el Lema 2.3.4, existe una familia finita de $x_i \in S$, $f_i \in \mathrm{Hom}_R(S, R)$ tal que para todo $s \in S$ se cumple $s = \sum_i f_i(s)x_i$. Como cada $f_i \in \mathrm{Hom}_R(S, R) \subseteq \mathrm{Hom}_R(S, S)$, por ser j un isomorfismo tenemos un elemento $d_i \in S * \Gamma$ tal que $f_i = j(d_i)$. Notemos ciertas fórmulas:

$$\sum_i x_i d_i = 1_{S*\Gamma} = \nu_{\mathrm{id}} \tag{2.3.5}$$

pues j es iso y $j\big(\sum_i x_i d_i\big)(s) = \sum_i x_i j(d_i)(s) = \sum_i x_i f_i(s) = s = j(1_{S*\Gamma})(s)$. Además para todo $\gamma \in \Gamma$ tenemos que

$$\nu_\gamma * d_i = d_i \tag{2.3.6}$$

pues $j(\nu_\gamma * d_i)(s) = j(\nu_\gamma)\big(j(d_i)(s)\big) = j(\nu_\gamma)\big(f_i(s)\big) = \gamma\big(\underbrace{f_i(s)}_{\in R}\big) = f_i(s) = j(d_i)(s)$. Al ser E un Γ-módulo, puedemos verlo como un $S*\Gamma$-módulo con la acción $\nu_\gamma \cdot \varphi = \gamma \cdot \varphi$. Claramente tendrán los mismos puntos fijos y si $\varphi_0 \in E^\Gamma, d \in S * \Gamma, s \in S$ tenemos que

$$d \cdot s\varphi_0 = j(d)(s)\varphi_0 \tag{2.3.7}$$

pues (verificando en $d = t\nu_\gamma$) $t\nu_\gamma \cdot s\varphi_0(\tau) = t\gamma \cdot s\varphi_0(\tau) = t\gamma\big(s\varphi_0(\gamma^{-1} \circ \tau)\big) =^{(2.3.3)} t\gamma(s)\gamma\big(\varphi_0(\gamma^{-1} \circ \tau)\big) =^{(2.3.4)} t\gamma(s)\varphi_0(\tau) = j(t\nu_\gamma)(s)\varphi_0(\tau)$. Ahora estamos en condiciones de definir la inversa

$$\mu : E \to E^\Gamma \otimes_R S \qquad \mu(\varphi) = \sum_i d_i \cdot \varphi \otimes x_i$$

Ciertamente $d_i \cdot \varphi \in E^\Gamma$, porque $t\nu_\gamma \cdot (d_i \cdot \varphi) = (t\nu_\gamma * d_i) \cdot \varphi =^{(2.3.6)} d_i \cdot \varphi$. Además son inversas: por un lado, para $\varphi \in E$ tenemos que

$$\rho \circ \mu(\varphi) = \rho\big(\sum_i d_i \cdot \varphi \otimes x_i\big) = \sum_i x_i(d_i \cdot \varphi) = \sum_i x_i d_i \cdot \varphi =^{(2.3.5)} \varphi$$

Por otro lado, para $\varphi_0 \in E^\Gamma$ y $s \in S$ tenemos que

$$\begin{aligned}\mu \circ \rho(\varphi_0 \otimes s) = \mu(s\varphi_0) = \sum_i d_i \cdot s\varphi_0 \otimes x_i &=^{(2.3.7)} \sum_i j(d_i)(s)\varphi_0 \otimes x_i \\ = \sum_i f_i(s)\varphi_0 \otimes x_i = \sum_i \varphi_0 \otimes f_i(s)x_i &= \varphi_0 \otimes \sum_i f_i(s)x_i = \varphi_0 \otimes s\end{aligned}$$

Ahora, componiendo los S-isomorfismos hallados, tenemos un isomorfismo

$$\rho \circ (\lambda \otimes \mathrm{id}_S) : S \otimes_R S \to E$$

tal que para $s, t \in S$

$$\rho \circ (\lambda \otimes \mathrm{id}_S)(s \otimes t) = \omega(\lambda(s) \otimes t) = \lambda(s)t$$

al evaluar en γ tenemos $\gamma(s)t$, es decir que recuperamos el morfismo (2.3.1), que será isomorfismo.

$(iii) \Rightarrow (i)$ Si (2.3.1) es un isomorfismo, en particular es sobreyectiva, por lo que existe un elemento $\sum_{i \in I} y_i \otimes x_i \in S \otimes S$ tal que su imagen es $(1, 0, \ldots, 0)$, así para las familias finitas de $x_1, \ldots, x_n, y_1, \ldots, y_n \in S$ resulta que $\sum_{i=1}^n x_i \mathrm{id}(y_i) = 1$ y si $\gamma \neq \mathrm{id}$ $\sum_{i=1}^n x_i \gamma(y_i) = 0$.

$(i) \Rightarrow (iv)$ Sea $\mathfrak{m}$ ideal maximal de S y $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq \mathrm{id}$. Razonemos por el absurdo: si para todo $s \in S$ resulta que $\gamma(s) - s \in \mathfrak{m}$, también lo cumplen $y_1, \ldots, y_n \in S$, es decir para cada i, $y_i - \gamma(y_i) \in \mathfrak{m}$. Pero en ese caso, por hipótesis resulta que

$$1 = 1 - 0 = \sum_{i \in I} x_i \mathrm{id}(y_i) - \sum_{i \in I} x_i \gamma(y_i) = \sum_{i \in I} x_i(y_i - \gamma(y_i)) \in \mathfrak{m}$$

Lo que es absurdo, por lo que al menos un $s \in S$ cumple que $\gamma(s) - s \notin \mathfrak{m}$

$(iv) \Rightarrow (i)$ Para cada $\gamma \in \Gamma$, notemos que el ideal de S generado por los elementos $s - \gamma(s)$ no está contenido en ningún maximal, porque por hipótesis, dado $\mathfrak{m}$ ideal maximal de S, siempre existe un $s \in S$ tal que $s - \gamma(s) \notin \mathfrak{m}$, entonces debe ser todo S. Por lo tanto para cada $\gamma \in \Gamma$ hay elementos $a_1, \ldots, a_r, b_1, \ldots, b_r \in S$ (dependientes de γ) tales que

$$1 = \sum_{j=1}^{r} a_j(b_j - \gamma(b_j)) = \sum_{j=1}^{r} a_j b_j - a_j\gamma(b_j) \tag{2.3.8}$$

Fijemos también

$$a_{r+1} = -\sum_{j=1}^{r} a_j\gamma(b_j) \qquad\qquad b_{j+1} = 1$$

Así es que para $\gamma \in \Gamma$, $\gamma \neq \mathrm{id}$ tenemos que

$$\sum_{j=1}^{r+1} a_j\gamma(b_j) = \sum_{j=1}^{r} a_j\gamma(b_j) + a_{r+1}\gamma(b_{r+1}) = \sum_{j=1}^{r} a_j\gamma(b_j) - \sum_{j=1}^{r} a_j\gamma(b_j) = 0$$

y para $\gamma = \mathrm{id}$ tenemos que

$$\begin{aligned}\sum_{j=1}^{r+1} a_j b_j = \sum_{j=1}^{r} a_j b_j + a_{r+1}b_{r+1} &= \sum_{j=1}^{r} a_j b_j - \sum_{j=1}^{r} a_j\gamma(b_j) \\ &=^{(2.3.8)} 1 + \sum_{j=1}^{r} a_j\gamma(b_j) - \sum_{j=1}^{r} a_j\gamma(b_j) = 1\end{aligned}$$

Para obtener los elementos x_i y y_i deseados basta con multiplicar para todo $\gamma \in \Gamma$ distinto de la identidad todas las combinaciones posibles de a_j^γ por un lado y b_j^γ por otro. Para cada $\sigma \in \Gamma$

$$\prod_{\gamma \neq \mathrm{id}} \Big(\sum_{j=1}^{r_\gamma + 1} a_j^\gamma \sigma(b_j^\gamma) \Big) = \delta_{\sigma,\mathrm{id}}$$

y al expandir esa producto se obtiene justamente la suma dada en (i).

$\square$

Observación 2.3.6. Claramente, la Definición 2.3.1 implica una (y por lo tanto todas) las proposiciones equivalentes del Teorema 2.3.5. Recíprocamente, si un anillo S con un grupo finito de automorfismos Γ y $R = S^\Gamma$ cumple las condiciones del Teorema, se tratará de una extensión de Galois. Según nuestra definición, solo basta ver que S/R es una extensión fielmente playa. En primer lugar S es un R-módulo proyectivo, por lo tanto es playo. Además, S es una extensión entera de $R = S^\Gamma$, pues cada $s \in S$ es raiz del polinomio mónico $\prod_{\gamma\in\Gamma}(x-\gamma(s))$, que tiene coeficientes en R, porque para $\sigma \in \Gamma$

$$\sigma\big(\prod_{\gamma\in\Gamma}(x-\gamma(s))\big) = \prod_{\gamma\in\Gamma}(x-\sigma\gamma(s)) = \prod_{\tau\in\Gamma}(x-\tau(s)).$$

Por ser una extensión entera, S/R cumple con la Proposición 2.2.7, ver [AM, Capítulo 5].

Observación 2.3.7. El caso K/k extensión de Galois de cuerpos, es ciertamente una extensión de Galois en el sentido aquí definido. Con la equivalencia (iv), como el único ideal maximal es $\{0\}$ y considerando que en extensiones de Galois el único elemento que fija todo K es la identidad, dado $a \in K$, existe un $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma(a) \neq a$, por lo tanto $\gamma(a) - a \notin \{0\}$.

Ejemplo 2.3.8 (Polinomios de Laurent). Sea k un cuerpo, $(m_1, \ldots, m_n) \in \mathbb{N}^n$ y para cada m_i, fijemos ζ_i una raiz m_i-ésima primitiva de la unidad en k.

Consideraremos $S = k[t_1^{\pm\frac{1}{m_1}}, \ldots, t_n^{\pm\frac{1}{m_n}}]$, $R = k[t_1^{\pm1}, \ldots, t_n^{\pm1}]$ y $\Gamma =< \gamma_1, \ldots, \gamma_n >$ donde

$$\gamma_i(t_1^{\frac{e_1}{m_1}} \ldots t_n^{\frac{e_n}{m_n}}) = \zeta_i^{e_i} t_1^{\frac{e_1}{m_1}} \ldots t_n^{\frac{e_n}{m_n}}$$

Notemos que

$$\mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/m_n\mathbb{Z} \simeq \Gamma$$

pero el isomorfismo de grupos no es canónico, pues dependerá de la elección de las ζ_i, pero una vez fijadas estas raíces, tenemos el isomorfismo

$$\mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/m_n\mathbb{Z} \to \Gamma \qquad \overline{e} \mapsto \gamma_{\overline{e}} = \gamma_1^{e_1} \circ \ldots \circ \gamma_n^{e_n}$$

para cada $e = (e_1, \ldots, e_n) \in \mathbb{Z}^n$

Teorema 2.3.9. *S/R es extensión de Galois con grupo Γ.*

Demostración. Γ es un grupo de R-automorfismos de S tal que $S^\Gamma = R$, pues para $e = (e_1, .., e_n) \in \mathbb{Z}^n$

$$\begin{aligned} z = \sum_{e\in\mathbb{Z}^n} x_e t_1^{\frac{e_1}{m_1}} \ldots t_n^{\frac{e_n}{m_n}} \in S^\Gamma &\Leftrightarrow \forall \gamma_i \in \Gamma \ \gamma_i(z) = z \\ &\Leftrightarrow \forall \gamma_i \in \Gamma \ \sum_{e\in\mathbb{Z}^n} x_e \zeta_i^{e_i} t_1^{\frac{e_1}{m_1}} \ldots t_n^{\frac{e_n}{m_n}} = z \\ &\Leftrightarrow \forall \gamma_i \in \Gamma \ \forall e \in \mathbb{Z}^n \ x_e \zeta_i^{e_i} = x_e \\ &\Leftrightarrow \forall \gamma_i \in \Gamma \ \forall e \in \mathbb{Z}^n \ x_e(\zeta_i^{e_i} - 1) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall \gamma_i \in \Gamma \ \forall e \in \mathbb{Z}^n \ x_e = 0 \vee \zeta_i^{e_i} = 1 \\ &\Leftrightarrow \forall \gamma_i \in \Gamma \ \forall e \in \mathbb{Z}^n \ x_e = 0 \vee m_i | e_i \Leftrightarrow z \in R \end{aligned}$$

Veamos que la extensión es de Galois según la equivalencia (i) del Teorema 2.3.5. Llamemos M al mínimo común múltiplo de $m_1, \dots, m_n$, por lo que para todo i : $1, \dots, n$ tenemos que $\zeta_i^M = 1$ y $1 + \zeta_i + \zeta_i^2 + \dots + \zeta_i^{M-1} = 0$. Vamos a definir

$$
\begin{array}{ll}
x_1 = \frac{1}{M} t_1^{\frac{-1}{m_1}}, \dots, t_n^{\frac{-1}{m_n}} & y_1 = t_1^{\frac{1}{m_1}}, \dots, t_n^{\frac{1}{m_n}} \\
x_2 = \frac{1}{M} t_1^{\frac{-2}{m_1}}, \dots, t_n^{\frac{-2}{m_n}} & y_2 = t_1^{\frac{2}{m_1}}, \dots, t_n^{\frac{2}{m_n}} \\
x_3 = \frac{1}{M} t_1^{\frac{-3}{m_1}}, \dots, t_n^{\frac{-3}{m_n}} & y_3 = t_1^{\frac{3}{m_1}}, \dots, t_n^{\frac{3}{m_n}} \\
\vdots & \\
x_M = \frac{1}{M} t_1^{\frac{-M}{m_1}}, \dots, t_n^{\frac{-M}{m_n}} & y_M = t_1^{\frac{M}{m_1}}, \dots, t_n^{\frac{M}{m_n}}
\end{array}
$$

Para la identidad tenemos

$$
\sum_{i=1}^{M} x_i y_i = \sum_{i=1}^{M} \frac{1}{M} t_1^{\frac{-i}{m_1}}, \dots, t_n^{\frac{-i}{m_n}} t_1^{\frac{i}{m_1}}, \dots, t_n^{\frac{i}{m_n}} = 1
$$

y para $\gamma_k \in \Gamma$

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{M} x_i y_i &= \sum_{i=1}^{M} \frac{1}{M} t_1^{\frac{-i}{m_1}}, \dots, t_n^{\frac{-i}{m_n}} \gamma_k(t_1^{\frac{i}{m_1}}, \dots, t_n^{\frac{i}{m_n}}) \\
&= \sum_{i=1}^{M} \frac{1}{M} t_1^{\frac{-i}{m_1}}, \dots, t_n^{\frac{-i}{m_n}} \zeta_k^i t_1^{\frac{i}{m_1}}, \dots, t_n^{\frac{i}{m_n}} = \sum_{i=1}^{M} \frac{1}{M} \zeta_k^i = 0
\end{aligned}
$$

□

2.4 Centroides y álgebras centrales

En esta sección definiremos otra de las herramientas que se utilizarán más adelante: los Centroides. Sea k un anillo conmutativo con 1, $R \in k$-**alg**, M un R-módulo, V un k-módulo y B una R-álgebra arbitraria. Por R-álgebra entendemos un R-módulo B con una función R-bilineal $B \times B \to B$, $(b_1, b_2) \mapsto b_1 b_2$. En particular no vamos a pedir otras identidades, aunque el principal caso de interés serán las álgebras de Lie. Un (B, R)-*dimódulo* es un R-módulo M junto con funciones R-bilineales $B \times M \to M$ $(b, m) \mapsto b \cdot m$ y $M \times B \to M$ $(m, b) \mapsto m \cdot b$. Las llamaremos acciones de B en M a izquierda y a derecha. En principio no hacemos ninguna suposición acerca de la compatibilidad de las dos acciones, por eso lo llamamos dimódulo, en lugar del conocido concepto de bimódulo.[4] Por ejemplo, B es un (B, R)-dimódulo con las multiplicaciones a derecha y a izquierda en B, llamado el *dimódulo regular* y denotado

[4] Esta notación fue introducida en [NP], por ser más general que el concepto de bi-módulo.

B_{reg}. El R-módulo $\mathrm{Hom}_k(B,V)$ también es un (B,R)-dimódulo, donde las acciones por B son $\big(b_1\cdot\varphi\big)(b_2)=\varphi(b_2b_1)=\big(\varphi\cdot b_2\big)(b_1)$. Para cualquier (B,R)-dimódulo M el *centroide de B con valores en M* es

$$\mathrm{Ctd}_R(B,M)=\{\chi\in\mathrm{Hom}_R(B,M):\chi(b_1b_2)=b_1\cdot\chi(b_2)=\chi(b_1)\cdot b_2 \text{ para todo } b_1,b_2\in B\}.$$

Denotaremos $\mathrm{Ctd}_R(B)=\mathrm{Ctd}_R(B,B_{\text{reg}})$, es decir el caso en que M es el dimódulo regular B_{reg}. En ese caso, el centroide de B es una subálgebra de la R-álgebra $\mathrm{End}_R(B)$. Además existe un morfismo natural de $R\to\mathrm{Ctd}_R(B)$ dado por $r\mapsto\chi_r$ donde $\chi_r(b)=rb$ para todo $b\in B$. Será inyectivo si y solo si B es fiel como R-módulo. Decimos que B es una R-álgebra *central* si este morfismo es un isomorfismo.

Ejemplo 2.4.1. Un álgebra simple de dimensión finita, sobre un cuerpo k algebraicamente cerrado de característica 0 es central-simple (ver [J, Teorema 10.1]). Estamos interesados en el caso particular de álgebras de Lie.

Igualmente, una k-álgebra de Lie de dimensión finita que admite una descomposición en espacio de raíces (llamada split o escindida), también es central. Como ejemplo de álgebra de Lie que no es central podemos considerar $\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C})$ vista como $\mathbb{R}$-álgebra de Lie. Su centroide está dado por los morfismos que consisten en multiplicar por un número complejo, es decir $\mathrm{Ctd}_{\mathbb{R}}(\mathfrak{sl}_2(\mathbb{C}))\simeq\mathbb{C}$ que contiene propiamente a $\mathbb{R}$.

Por restricción de escalares podemos ver a B como una k-álgebra. En los centroides tenemos la inclusión (en general propia)

$$\mathrm{Ctd}_R(B)\subseteq\ \mathrm{Ctd}_k(B)$$

pero si B es *perfecta*, es decir $B=BB$, donde $BB=\mathrm{Span}_R\{ab:a,b,\in B\}$, se tendrá la igualdad (ver [J, Capítulo X]).

Consideremos ahora A una k-álgebra (arbitraria). Nos interesará relacionar de alguna manera el $\mathrm{Ctd}_k(A)$ con $\mathrm{Ctd}_R(A\otimes_k R)$.

Lema 2.4.2. *Sea A una k-álgebra finitamente presentada como k-módulo y $R\in k$-**alg** tal que R es playo como k-módulo. Entonces el morfismo canónico*

$$\omega_{\text{Ctd}}:\ \mathrm{Ctd}_k(A)\otimes_k R\to\ \mathrm{Ctd}_R(A\otimes_k R)$$

es un isomorfismo de R-álgebras. En particular, si A es central, $A\otimes_k R$ lo es.

Demostración. Notemos que ω_{Ctd} no es otra cosa que la restricción a $\mathrm{Ctd}_k(A)\otimes_k R$ del morfismo de la Proposición 2.1.2. Definamos

$$\beta:\mathrm{End}_k(A)\to\ \mathrm{Hom}_k(A\otimes_k A,A\oplus A)$$

como el único morfismo k-lineal tal que

$$\beta(f)(a_1 \otimes a_2) = \big(f(a_1a_2) - f(a_1)a_2, f(a_1a_2) - a_1f(a_2)\big).$$

Por definición, resulta que $\mathrm{Ctd}_k(A) = \mathrm{Ker}(\beta)$, dando la sucesión exacta.

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ctd}_k(A) \longrightarrow \mathrm{End}_k(A) \xrightarrow{\beta} \mathrm{Hom}_k(A \otimes_k A, A \oplus A) \tag{2.4.1}$$

Por ser R/k playo será exacta

$$0 \longrightarrow \mathrm{Ctd}_k(A) \otimes_k R \longrightarrow \mathrm{End}_k(A) \otimes_k R \xrightarrow{\beta\otimes\mathrm{Id}_R} \mathrm{Hom}_k(A \otimes_k A, A \oplus A) \otimes_k R$$

Al ser A finitamente presentado, es finitamente generado y por lo tanto también lo es $A \otimes_k A$. Aplicando otra vez la Proposición 2.1.2 tenemos que el morfismo canónico $\mathrm{Hom}_k(A \otimes_k A, A \oplus A) \otimes_k R \to \mathrm{Hom}_R\big((A \otimes_k A) \otimes_k R, (A \oplus A) \otimes_k R\big)$ es inyectivo. Componiendo con los isomorfismos canónicos tenemos el monomorfismo $\upsilon : \mathrm{Hom}_k(A \otimes_k A, A \oplus A) \otimes_k R \to \mathrm{Hom}_R\big((A \otimes_k R) \otimes_R (A \otimes_k R), (A \otimes_k R) \oplus (A \otimes_k R)\big)$. Así obtenemos el siguiente diagrama,

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & \mathrm{Ctd}_k(A) \otimes_k R \arrow[r] \arrow[d, "\omega_{\mathrm{Ctd}}"'] & \mathrm{End}_k(A) \otimes_k R \arrow[r, "\beta\otimes\mathrm{Id}_R"] \arrow[d, "\omega"'] & \mathrm{Hom}_k(A \otimes_k A, A \oplus A) \otimes_k R \arrow[d, "\upsilon"'] \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Ctd}_R(A \otimes_k R) \arrow[r] & \mathrm{End}_k(A \otimes_k R) \arrow[r, "\beta_{A_R}"] & \mathrm{Hom}_R\big(A_R \otimes_R A_R, A_R \oplus A_R\big)
\end{tikzcd}$$

donde denotamos $A_R = A \otimes_k R$. Notemos que la fila de abajo también es exacta, en analogía con (2.4.1). El cuadrado izquierdo es evidentemente conmutativo, pues ω_{Ctd} es restricción de ω. Por otro lado, el cuadrado derecho conmuta, pues para $f \in \mathrm{End}_k(A)$, $r, r_1, r_2 \in R$ y $a_1, a_2 \in A$ tenemos que

$$\begin{aligned}
&\beta_{A_R}\big(\omega(f \otimes r)\big)(a_1 \otimes r_1 \otimes a_2 \otimes r_2) = \\
&\quad = \big(\omega(f \otimes r)(a_1a_2 \otimes r_1r_2) - \omega(f \otimes r)(a_1 \otimes r_1)a_2 \otimes r_2, \\
&\qquad \omega(f \otimes r)(a_1a_2 \otimes r_1r_2) - a_1 \otimes r_1\omega(f \otimes r)(a_2 \otimes r_2)\big) \\
&\quad = \big(f(a_1a_2) \otimes rr_1r_2 - (f(a_1) \otimes rr_1)(a_2 \otimes r_2), \\
&\qquad f(a_1a_2) \otimes rr_1r_2 - (a_1 \otimes r_1)(f(a_2) \otimes rr_2)\big) \\
&\quad = \big(f(a_1a_2) \otimes rr_1r_2 - (f(a_1)a_2 \otimes rr_1r_2), f(a_1a_2) \otimes rr_1r_2 - (a_1f(a_2) \otimes rr_1r_2)\big) \\
&\quad = \big((f(a_1a_2) - f(a_1)a_2) \otimes rr_1r_2, (f(a_1a_2) - a_1f(a_2)) \otimes rr_1r_2\big) \\
&\quad = \upsilon\big(\beta \otimes \mathrm{Id}_R(f \otimes r)\big)(a_1 \otimes r_1 \otimes a_2 \otimes r_2)
\end{aligned}$$

Como la vertical central es biyectiva, la vertical de la derecha es inyectiva, resulta que ω_{Ctd} es un isomorfismo. En el caso que A sea central, resultará que $A \otimes_k R$ también lo es, pues $R \simeq k \otimes_k R \simeq \mathrm{Ctd}_k(A) \otimes_k R \simeq \mathrm{Ctd}_R(A \otimes_k R)$.

□

2.5 El functor Aut

Sea $R \in k$-**alg** y N un R-módulo. En el desarrollo de la tesis trabajaremos en más de una ocasión con el functor $\mathbf{Aut}(N)$ de la categoría R-**alg** en la categoría de Grupos, que asigna a $S \in R$-**alg** el grupo

$$\mathbf{Aut}(N)(S) = \mathrm{Aut}_S(N \otimes_R S)$$

y a un morfismo $\alpha : S \to T$, el morfismo

$$\mathbf{Aut}(N)(\alpha) : \mathbf{Aut}(N)(S) = \mathrm{Aut}_S(N \otimes_R S) \to \mathbf{Aut}(N)(T) = \mathrm{Aut}_T(N \otimes_R T)$$

tal que si $f \in \mathrm{Aut}_S(N \otimes_R S)$ satisface $f(x \otimes 1) = \sum x_i \otimes s_i$ para $x \in N$, entonces

$$\mathbf{Aut}(N)(\alpha)(f)(x \otimes 1) = \sum x_i \otimes \alpha(s_i)$$

Cabe mencionar que los elementos de $\mathbf{Aut}(N)(S)$ son morfismos de S-módulos, por lo que están univocamente determinados por sus valores en $x \otimes 1$.

Si ahora lo aplicamos a los morfismos $p_i : S \to S''$ definidos en (2.2.1), tenemos para $\lambda \in \mathbf{Aut}(N)(S) = \mathrm{Aut}_S(N \otimes_R S)$

(2.5.1)

$$\mathbf{Aut}(N)(p_1)(\lambda) = \lambda \otimes \mathrm{Id}_S \in \mathbf{Aut}(N)(S'') = \mathrm{Aut}_{S''}(N \otimes_R S'')$$
$$\mathbf{Aut}(N)(p_2)(\lambda) = (\mathrm{Id}_N \otimes \zeta) \circ (\lambda \otimes \mathrm{Id}_S) \circ (\mathrm{Id}_N \otimes \zeta) \in \mathbf{Aut}(N)(S'') = \mathrm{Aut}_{S''}(N \otimes_R S'')$$

para $\zeta : S \otimes_R S \to S \otimes_R S$ el isomorfismo tal que $\zeta(s \otimes t) = t \otimes s$.

La siguiente proposición será la base para ver las extensiones de Galois como caso particular de las extensiones fielmente playas.

Proposición 2.5.1. *Sea $R \in k$-**alg** y N un R-módulo. El functor $\mathbf{Aut}(N)$ conmuta con productos, es decir para $S, T \in R$-**alg***

$$\mathbf{Aut}(N)(S \times T) \simeq \mathbf{Aut}(N)(S) \times \mathbf{Aut}(N)(T)$$

Demostración. Llamemos p_S y p_T a las proyecciones de $S \times T$ en S y T respectivamente. Functorialmente tenemos entonces

$$P_S = \mathbf{Aut}(N)(p_S) : \mathbf{Aut}(N)(S \times T) \to \mathbf{Aut}(N)(S)$$

y

$$P_T = \mathbf{Aut}(N)(p_T) : \mathbf{Aut}(N)(S \times T) \to \mathbf{Aut}(N)(T)$$

tales que para $f \in \mathbf{Aut}(N)(S \times T)$ tal que $f(n \otimes (1_S, 1_T)) = \sum_{i \in I} n_i \otimes (s_i, t_i)$

$$P_S(f)(n \otimes 1_S) = \sum_{i \in I} n_i \otimes s_i \quad \text{y} \quad P_T(f)(n \otimes 1_T) = \sum_{i \in I} n_i \otimes t_i$$

Planteamos entonces el morfismo

$$f \in \mathbf{Aut}(N)(S \times T) \mapsto (P_S(f), P_T(f)) \in \mathbf{Aut}(N)(S) \times \mathbf{Aut}(N)(T)$$

Para ver que es un isomorfismo, presentaremos una inversa. Para eso necesitamos una función $\mathbf{Aut}(N)(S) \times \mathbf{Aut}(N)(T) \to \mathbf{Aut}(N)(S \times T)$. Sea $(g, h) \in \mathbf{Aut}(N)(S) \times \mathbf{Aut}(N)(T)$. Empecemos por considerar una función

$$N \times S \times T \longrightarrow (N \otimes_R S) \times (N \otimes_R T) \xrightarrow{\simeq} N \otimes_R (S \times T)$$

donde la primer función está dada por $(n, s, t) \mapsto (g(n \otimes s), h(n \otimes t))$ y la segunda es el isomorfismo canónico

$$(x \otimes s, y \otimes t) \mapsto x \otimes (s, 0) + y \otimes (0, t)$$

Esta composición es bilineal y R-balanceada, por lo que induce un elemento de $\mathbf{Aut}(N)(S \times T)$, que llamaremos $f_{(g,h)}$, completando la buena definición. Ciertamente son inversas, pues es directo verificar que dado $(g, h) \in \mathbf{Aut}(N)(S) \times \mathbf{Aut}(N)(T)$, si calculamos $f_{(g,h)}$ y luego $(P_S(f_{(g,h)}), P_T(f_{(g,h)}))$ recuperamos (g, h) y recíprocamente, dado $f \in \mathbf{Aut}(N)(S \times R)$, $f = f_{(P_S(f), P_T(f))}$

$\square$

Capítulo 3

Teoría de Descenso

En este capítulo presentamos los resultados fundamentales de teoría de descenso en extensiones fielmente playas y su relación con las formas torcidas, viendo el caso particular de extensiones de Galois. El resultado principal está en la sección 3.6 en donde se demuestra (Teorema 3.6.7) que los functores de la categoría de álgebras a la categoría de módulos que son estables por cambio de base preservan formas. Si bien la motivación original de este tema fue aplicarlo al estudio de formas bilineales invariantes en el capítulo 5, trabajamos con un contexto lo suficientemente amplio para que tenga interés propio.

3.1 Datos de descenso y Teorema de Descenso

En esta sección presentamos los datos de descenso y el teorema de descenso para el caso de S/R una extensión fielmente playa de anillos.

Si M es un S-módulo, entonces $M \otimes_R S$ es un $(S \otimes_R S)$-módulo de dos maneras: la directa y la cruzada, es decir:

$(u \otimes v) \cdot (m \otimes s) = um \otimes vs$

$(u \otimes v) \cdot (m \otimes s) = vm \otimes us$

En el caso que $M \simeq N \otimes_R S$ para algún R-módulo N, se puede definir una biyección R-lineal η de $M \otimes_R S \simeq (N \otimes_R S) \otimes_R S$ en sí mismo tal que

$$n \otimes s \otimes t \mapsto n \otimes t \otimes s$$

que es un isomorfismo de $S \otimes_R S$-módulos, considerando en el conjunto de salida la primer estructura y la segunda en el de llegada. Este morfismo induce tres nuevos automorfismos en $N \otimes_R S \otimes_R S \otimes_R S$:

$$\begin{aligned}
\eta^0(n \otimes s \otimes u \otimes v) &= n \otimes v \otimes u \otimes s \\
\eta^1(n \otimes s \otimes u \otimes v) &= n \otimes v \otimes s \otimes u \\
\eta^2(n \otimes s \otimes u \otimes v) &= n \otimes u \otimes s \otimes v
\end{aligned}$$

Es fácil ver que se cumple $\eta^1 = \eta^0 \circ \eta^2$. Generalizando esta idea es que se define el concepto de *Dato de Descenso*.

Definición 3.1.1 (Datos de Descenso). Si M es un S-módulo, llamamos *Dato de Descenso* en M a una biyección $\eta : M \otimes_R S \to M \otimes_R S$ que es un isomorfismo de una $(S \otimes_R S)$-estructura a otra y se cumple $\eta^1 = \eta^0 \circ \eta^2$ para los morfismos

$$\begin{aligned}
\eta^0(m \otimes t \otimes s) &= \sum m_i \otimes t \otimes s_i \\
\eta^1(m \otimes t \otimes s) &= \sum m_i \otimes s_i \otimes t \\
\eta^2(m \otimes s \otimes t) &= \sum m_i \otimes s_i \otimes t
\end{aligned}$$

considerando $\eta(m \otimes s) = \sum m_i \otimes s_i$.

Observación 3.1.2. Si llamamos $\zeta : S \otimes_R S \to S \otimes_R S$ al isomorfismo que intercambia los elementos, es decir

$$\zeta(s \otimes t) = t \otimes s$$

resulta que

$$\begin{aligned}
\eta^0 &= \zeta \circ \eta \otimes \mathrm{Id}_S \circ \zeta \\
\eta^1 &= \eta \otimes \mathrm{Id}_S \circ \zeta \\
\eta^2 &= \eta \otimes \mathrm{Id}_S
\end{aligned}$$

Teorema 3.1.3. *Sea S/R una extensión fielmente playa. Entonces los R-módulos son naturalmente equivalentes a los S-módulos con datos de descenso.*

Demostración. Veamos un esquema de la demostración[1]. Dado un R-módulo N, le corresponde el S-módulo $M = N \otimes_R S$ y el dato de descenso es el morfismo η mencionado al principio de esta sección. Además, dado $\phi : N \to N'$ un R-morfismo, le corresponde $\phi \otimes \mathrm{Id}_S : N \otimes_R S \to N' \otimes_R S$, que conmuta con el dato de descenso, en el sentido que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(N \otimes_R S) \otimes_R S \arrow[r, "\phi\otimes\mathrm{Id}_S"] \arrow[d, "\eta"'] & (N' \otimes_R S) \otimes_R S \arrow[d, "\eta'"'] \\
(N \otimes_R S) \otimes_R S \arrow[r, "\phi\otimes\mathrm{Id}_S"'] & (N' \otimes_R S) \otimes_R S
\end{tikzcd}$$

[1]Los detalles se pueden ver en [W, Capítulo 17.2].

conmuta.

Por otro lado, dado un S-módulo M y η su dato de descenso, basta considerar $N = \{m \in M : \eta(m \otimes 1) = m \otimes 1\}$. Dado $\psi : M \to M'$ un S-morfismo que conmuta con los datos de descenso (es decir $(\psi \otimes \mathrm{Id}_S) \circ \eta = \eta' \circ (\psi \otimes \mathrm{Id}_S)$), bastará tomar $\psi|_N$, que toma valores en N', pues para $x \in N$,

$$\eta'(\psi(x) \otimes 1) = (\psi \otimes \mathrm{Id}_S)(\eta(x \otimes 1)) = (\psi \otimes \mathrm{Id}_S)(x) = \psi(x) \otimes 1$$

Como S/R es una extensión fielmente playa, por el Teorema 2.2.8, cualquier R-módulo cumple

$$N \simeq N \otimes_R 1 = \{x \in N \otimes_R S : \mathrm{Id}_N \otimes p_1(x) = \mathrm{Id}_N \otimes p_2(x)\}$$

por lo que se puede verificar que las construcciones son inversas entre sí. □

Observación 3.1.4 (Descenso de Álgebras). Si N tiene definida una aplicación R-bilineal $N \times N \to N$, que induce un morfismo R-lineal $N \otimes_R N \to N$, este se corresponde (mediante el Teorema 3.1.3) con una aplicación S-lineal $(N \otimes_R N) \otimes_R S \to N \otimes_R S$ que conmuta con los datos de descenso. Mediante el isomorfismo canónico (2.1.1), obtenemos una aplicación S-lineal

$$(N \otimes_R S) \otimes_S (N \otimes_R S) \to N \otimes_R S$$

que será una multiplicación $(n \otimes s) \otimes (n' \otimes s') \mapsto nn' \otimes ss'$ que conmuta con los datos de descenso, entendidos mediante el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\big((N \otimes_R S) \otimes_S (N \otimes_R S)\big) \otimes_R S \arrow[r] \arrow[d] & (N \otimes_R N) \otimes_R S \arrow[d, "\eta_{N\otimes N}"'] \\
\big((N \otimes_R S) \otimes_S (N \otimes_R S)\big) \otimes_R S \arrow[r] & (N \otimes_R N) \otimes_R S
\end{tikzcd}$$

Recíprocamente, dado (M, η) un S-módulo con un dato de descenso, tenemos que $(M \otimes_S M, \eta_\otimes)$ también es un S-módulo con dato de descenso, donde este último se ve como $\eta \otimes \eta$ mediante el isomorfismo

$$(M \otimes_R S) \otimes_{S \otimes_R S} (M' \otimes_R S) \simeq M \otimes_S M' \otimes_R S$$

tal que $(m \otimes s) \otimes (m' \otimes s') \mapsto (m \otimes m') \otimes ss'$, es decir definido por el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(M \otimes_R S) \otimes_{S \otimes_R S} (M \otimes_R S) \arrow[r] \arrow[d, "\eta\otimes\eta"'] & (M \otimes_S M) \otimes_R S \arrow[d, "\eta_\otimes"'] \\
(M \otimes_R S) \otimes_{S \otimes_R S} (M \otimes_R S) \arrow[r] & (M \otimes_S M) \otimes_R S
\end{tikzcd}$$

Si M tiene definida una multiplicación que conmuta con los datos de descenso, se puede obtener una multiplicación inducida en N. Ciertamente, dado $x, y \in N$, $xy \in N$. Según el Teorema 3.1.3, tenemos que $\eta(x \otimes 1) = x \otimes 1$ y $\eta(y \otimes 1) = y \otimes 1$, entonces

$$\eta(xy \otimes 1) = \mathrm{mult}\big(\eta(x \otimes 1), (\eta(y \otimes 1)\big) = xy \otimes 1$$

es decir, cae en N.

Como S/R es una extensión fielmente playa, ciertas identidades (que pueden ser escritas en términos de productos tensioriales, como por ejemplo Jacobi o asociatividad) son válidas en R si y solo si lo son en S. De esta manera se extiende el teorema de descenso a varios tipos de álgebras, como las asociativas o de Lie.

3.2 Formas torcidas

En esta sección veremos la relación que hay entre la teoría de descenso y las formas torcidas, a fin de poder utilizar dicha teoría para estudiarlas. Empecemos por la definición:

Definición 3.2.1 (Formas Torcidas). Dado un R-módulo N, decimos que otro R-módulo L es una forma torcida si existe una extensión S/R fielmente playa de anillos y un isomorfismo de S-módulos $\theta : N \otimes_R S \to L \otimes_R S$.

En principio, como L es un R-módulo, podemos aplicar el Teorema 3.1.3, y así es que le corresponde un S-módulo $L \otimes_R S$ y un dato de descenso η_L. Mediante el isomorfismo θ, este último se corresponde a $N \otimes_R S$ y un dato de descenso ψ, que hace conmutar el diagrama

(3.2.1)
$$\begin{tikzcd} N \otimes_R S \otimes_R S \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\theta\otimes\mathrm{Id}_S"'] & N \otimes_R S \otimes_R S \arrow[d, "\theta\otimes\mathrm{Id}_S"'] \\ L \otimes_R S \otimes_R S \arrow[r, "\eta_L"] & L \otimes_R S \otimes_R S \end{tikzcd}$$

Aplicando nuevamente el Teorema 3.1.3, L es isomorfo al R-módulo descendido de $N \otimes_R S$ y su dato de descenso ψ, es decir

$$L \simeq \{x \in N \otimes_R S : \psi(x \otimes 1) = x \otimes 1\}$$

Recordemos que ψ es isomorfismo tomando la estructura directa de S''-módulo en el conjunto de salida y la cruzada en el de llegada, por lo que conviene considerar

$$\varphi : N \otimes_R S \otimes_R S \to N \otimes_R S \otimes_R S \text{ tal que } \psi = \eta \circ \varphi$$

donde $\eta : N \otimes_R S'' \to N \otimes_R S''$ es $\eta(n \otimes s \otimes t) = n \otimes t \otimes s$ es isomorfismo considerando la primera estructura en el conjunto de salida y la segunda en el conjunto de llegada. Así $\varphi \in \mathrm{Aut}_{S''}(N \otimes_R S'')$, donde $N \otimes_R S''$ tiene la estructura directa de S''-módulo. A partir de esta relación reescribimos

$$\begin{aligned} L &\simeq \{x \in N \otimes_R S : \psi(x \otimes 1) = x \otimes 1\} \\ &= \{x \in N \otimes_R S : \eta \circ \varphi(x \otimes 1) = x \otimes 1\} \\ &= \{x \in N \otimes_R S : \varphi(x \otimes 1) = \eta^{-1}(x \otimes 1)\} \\ &= \{x \in N \otimes_R S : \varphi(\mathrm{Id}_N \otimes p_1(x)) = \mathrm{Id}_N \otimes p_2(x)\} \end{aligned}$$

Reescribamos también la condición de ser "dato de descenso" en términos de φ, lo que veremos más adelante que será la condición de "ser cociclo". Para eso necesitamos algunas definiciones primero: denotemos $S''' = S \otimes_R S \otimes_R S$ y definamos los morfismos

$$\begin{aligned} p_{12} &: S'' \to S''' & p_{12}(s \otimes t) &= s \otimes t \otimes 1 \\ p_{13} &: S'' \to S''' & p_{13}(s \otimes t) &= s \otimes 1 \otimes t \\ p_{23} &: S'' \to S''' & p_{23}(s \otimes t) &= 1 \otimes s \otimes t \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

Si recordamos el functor **Aut** definido en la Sección 2.5, tenemos

$$\mathbf{Aut}(N)(p_{ij}) : \mathrm{Aut}_{S''}(N \otimes_R S'') \to \mathrm{Aut}_{S'''}(N \otimes_R S''')$$

y dado $\varphi \in \mathrm{Aut}_{S''}(N \otimes_R S'')$, denotemos

$$\varphi_{ij} = \mathbf{Aut}(N)(p_{ij})(\varphi) \in \mathrm{Aut}_{S'''}(N \otimes_R S''')$$

Notemos que lo que hace cada φ_{ij} es aplicar φ en la componente de N y las dos coordenadas de S que corresponden al índice, dejando al otro fijo.

Lema 3.2.2. *Sea S/R una extensión fielmente playa y N un R-módulo. Sea*

$$\eta : N \otimes_R S'' \to N \otimes_R S''$$

el automorfismo de S''-álgebras (con la estructura directa en el conjunto de salida y la estructura cruzada en el conjunto de llegada) tal que

$$\eta(n \otimes s \otimes t) = n \otimes t \otimes s$$

Dado $\psi : N \otimes S'' \to N \otimes S''$ isomorfismo de S''-álgebras con la estructura directa en el conjunto de salida y la estructura cruzada en el conjunto de llegada, consideremos $\varphi : N \otimes_R S \otimes_R S \to N \otimes_R S \otimes_R S$ tal que $\psi = \eta \circ \varphi$. Entonces ψ es dato de descenso si y solo si φ cumple $\varphi_{23} \circ \varphi_{12} = \varphi_{13}$

Demostración. Unas cuentas directas nos permiten verificar que

$$\begin{aligned}\psi^1 &= \eta^1 \circ \varphi_{13}\\ \psi^2 &= \eta^2 \circ \varphi_{12}\\ \psi^0 &= \eta^1 \circ \varphi_{23} \circ \eta^2\end{aligned}$$

Así es que ψ es dato de descenso si y solo si

$$\begin{aligned}\psi^0 \circ \psi^2 = \psi^1 &\Leftrightarrow \eta^1 \circ \varphi_{23} \circ \eta^2 \circ \eta^2 \circ \varphi_{12} = \eta^1 \circ \varphi_{13}\\ &\Leftrightarrow \eta^1 \circ \varphi_{23} \circ \varphi_{12} = \eta^1 \circ \varphi_{13}\\ &\Leftrightarrow \varphi_{23} \circ \varphi_{12} = \varphi_{13}\end{aligned}$$

□

Ya casi estamos en condiciones de enunciar la relación de la teoría de formas torcidas y $H^1(S/R, \mathbf{F})$ para S/R una extensión fielmente playa de anillos y $\mathbf{F}$ un functor de la categoría de R-álgebras en la de grupos.

Definición 3.2.3 (Cociclos y Cohomología). Decimos que un elemento $\varphi \in \mathbf{F}(S'')$ es un *cociclo* si y solo si se cumple

$$\mathbf{F}(p_{13})(\varphi) = \mathbf{F}(p_{23})(\varphi) \circ \mathbf{F}(p_{12})(\varphi)$$

para las proyecciones $p_{ij} : S'' \to S'''$ definidas en (3.2.2). Denotaremos $Z^1(S/R, \mathbf{F})$ al conjunto de cociclos y definamos una relación de equivalencia: dados $\varphi, \varphi' \in \mathbf{F}(S'')$ decimos que son cohomólogos si y solo si existe un $\lambda \in \mathbf{F}(S)$ tal que

$$\varphi' = \mathbf{F}(p_2)(\lambda) \circ \varphi \circ \big(\mathbf{F}(p_1)(\lambda)\big)^{-1}$$

para las proyecciones $p_i : S' \to S''$. Denotaremos $H^1(S/R, \mathbf{F})$ al conjunto cociente[2].

Teorema 3.2.4. *Sea S/R una extensión fielmente playa y N un R-módulo. Existe una biyección entre clase de isomorfismos de S/R formas de N y $H^1(S/R, \mathbf{Aut}(N))$*

Demostración. Dada L una S/R forma de N, mediante la construcción anterior definimos φ que es un cociclo. Bastará tomar su clase en $H^1(S/R, \mathbf{Aut}(N))$.

Esta construcción está bien definida (y es inyectiva), pues dos formas L, L' son isomorfas si y solo si, al verlas mediante el teorema de descenso dentro de $N \otimes_R S$ con sus respectivos datos de descenso ψ y ψ', existe un isomorfismo que conmuta con

[2] En principio solo es un conjunto "con un elemento distinguido: la clase de N". Si el functor fuese de álgebras en grupos abelianos, sería grupo abeliano.

estos datos, es decir si y solo si existe un $\lambda \in \mathrm{Aut}_S(N \otimes_R S)$ tal que $(\lambda \otimes \mathrm{Id}_S) \circ \psi = \psi' \circ (\lambda \otimes \mathrm{Id}_S)$.

$$\begin{tikzcd}
N \otimes_R S'' \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\lambda\otimes\mathrm{Id}_S"'] & N \otimes_R S'' \arrow[d, "\lambda\otimes\mathrm{Id}_S"] \\
N \otimes_R S'' \arrow[r, "\psi'"] & N \otimes_R S''
\end{tikzcd}$$

Considerando que esas formas corresponderán a los cociclos φ y φ' tales que $\psi = \eta \circ \varphi$ y $\psi' = \eta \circ \varphi'$ tenemos

$$\begin{aligned}
(\lambda \otimes \mathrm{Id}_S) \circ \psi = \psi' \circ (\lambda \otimes \mathrm{Id}_S) &\Leftrightarrow \\
(\lambda \otimes \mathrm{Id}_S) \circ \eta \circ \varphi = \eta \circ \varphi' \circ (\lambda \otimes \mathrm{Id}_S) &\Leftrightarrow \\
\eta \circ (\lambda \otimes \mathrm{Id}_S) \circ \eta \circ \varphi = \varphi' \circ (\lambda \otimes \mathrm{Id}_S) &\Leftrightarrow^{(2.5.1)} \\
\mathbf{Aut}(N)(p_2)(\lambda) \circ \varphi = \varphi' \circ \mathbf{Aut}(N)(p_1)(\lambda) &\Leftrightarrow \\
\mathbf{Aut}(N)(p_2)(\lambda) \circ \varphi \circ \Big(\mathbf{Aut}(N)(p_1)(\lambda)\Big)^{-1} = \varphi' &
\end{aligned}$$

Es decir si y solo si φ y φ' son cohomólogos.

Para ver la sobreyectividad, dado φ cociclo, basta tomar $\psi = \eta \circ \varphi$ que, por el Lema 3.2.2 es un dato de descenso y por lo tanto define una S/R forma de N que dará a φ como cociclo. $\square$

Veamos ahora cómo podemos obtener el cociclo que define la forma torcida a partir del isomorfismo trivializante: si L es una S/R-forma torcida de N, tenemos un isomorfismo de S-módulos $\theta : N \otimes_R S \to L \otimes_R S$. Construiremos $u \in \mathrm{Aut}_{S''}(N \otimes_R S'')$ tal que

$$L \simeq \{x \in N \otimes_R S : u(\mathrm{Id}_N \otimes p_1(x)) = \mathrm{Id}_N \otimes p_2(x)\}$$

Antes de pasar a la construcción, notemos que considerando $p_{1,2} : S \to S''$, podemos ver S'' como S-álgebra de dos maneras distintas, lo que nos permite definir $S \otimes_S S''$ de dos maneras distintas. Para denotar estas dos maneras utilizaremos la notación $S \otimes_{p_i} S''$ en lugar de la notación tradicional, para evitar ambigüedades. Notemos que si vemos S'' como R-álgebra, las dos estructuras (dadas por $R \hookrightarrow S \xrightarrow{p_i} S''$) coinciden, por ser S/R una extensión fielmente playa, por lo que no hay ambigüedad al suponer $\otimes_R S''$.

Consideremos los morfismos de S-álgebras (con la estructura correspondiente a p_i en cada caso) $\sigma_i : S \otimes_{p_i} S'' \to S''$ dados por $\sigma_i(s_1 \otimes s_2 \otimes s_3) = p_i(s_1)(s_2 \otimes s_3)$ es decir

$$\sigma_1(s_1 \otimes s_2 \otimes s_3) = s_1 s_2 \otimes s_3$$

y

$$\sigma_2(s_1 \otimes s_2 \otimes s_3) = s_2 \otimes s_1 s_3$$

Dado N un R-módulo, tendremos los isomorfismos $\mathrm{Id}_N \otimes \sigma_i : N \otimes_R (S \otimes_{p_i} S'') \to N \otimes_R S''$, es decir

$$\mathrm{Id}_N \otimes \sigma_1 (x \otimes s_1 \otimes s_2 \otimes s_3) = x \otimes s_1 s_2 \otimes s_3$$

y

$$\mathrm{Id}_N \otimes \sigma_2 (x \otimes s_1 \otimes s_2 \otimes s_3) = x \otimes s_2 \otimes s_1 s_3$$

Estos son morfismos de S''-álgebras, con la estructura directa (en la última componente S'' que tienen ambos).

Teorema 3.2.5. *Sea N un R-módulo y L una S/R-forma torcida de N con isomorfismo trivializante $\theta : N \otimes_R S \to L \otimes_R S$. Si definimos los isomorfismos de S''-álgebras θ_1 y θ_2 a partir del siguiente diagrama conmutativo,*

$$\begin{tikzcd}
(N \otimes_R S) \otimes_{p_i} S'' \arrow[r, "\theta \otimes \mathrm{Id}_{S''}", "\simeq"'] \arrow[d, "\mathrm{Id}_N \otimes \sigma_i"', "\simeq"] & (L \otimes_R S) \otimes_{p_i} S'' \arrow[d, "\simeq"', "\mathrm{Id}_L \otimes \sigma_i"] \\
N \otimes_R S'' \arrow[r, "\theta_i", "\simeq"'] & L \otimes_R S''
\end{tikzcd} \tag{3.2.3}$$

resulta que $u = \theta_2^{-1} \circ \theta_1 \in Z^1(S/R, \mathbf{Aut}(N))$ es el cociclo que define la forma, es decir

$$L \simeq \{x \in N \otimes_R S : u(\mathrm{Id}_N \otimes p_1(x)) = \mathrm{Id}_N \otimes p_2(x)\}$$

Demostración. Para la demostración estudiemos primero θ_1 y θ_2, siguiendo el diagrama (3.2.3). Sea $n \in N$ y digamos que $\theta(n \otimes 1) = \sum l_i \otimes s_i$ y sean $s_1, s_2 \in S$. Para θ_1 tenemos que

$$\begin{tikzcd}
(n \otimes 1) \otimes_{p_1} s_1 \otimes s_2 \arrow[r, mapsto, "\theta \otimes \mathrm{Id}_{S''}"] & \sum (l_i \otimes s_i) \otimes_{p_1} s_1 \otimes s_2 \arrow[d, mapsto, "\mathrm{Id}_L \otimes \sigma_1"] \\
n \otimes s_1 \otimes s_2 \arrow[u, mapsto, "\mathrm{Id}_N \otimes \sigma_1"'] & \sum l_i \otimes s_i s_1 \otimes s_2
\end{tikzcd}$$

es decir $\theta_1(n \otimes s_1 \otimes s_2) = \sum l_i \otimes s_i s_1 \otimes s_2 = \theta \otimes \mathrm{Id}_S(n \otimes s_1 \otimes s_2)$. Ahora para θ_2 tenemos que

$$\begin{tikzcd}
(n \otimes 1) \otimes_{p_2} s_1 \otimes s_2 \arrow[r, mapsto, "\theta \otimes \mathrm{Id}_{S''}"] & \sum (l_i \otimes s_i) \otimes_{p_2} s_1 \otimes s_2 \arrow[d, mapsto, "\mathrm{Id}_L \otimes \sigma_2"] \\
n \otimes s_1 \otimes s_2 \arrow[u, mapsto, "\mathrm{Id}_N \otimes \sigma_2"'] & \sum l_i \otimes s_1 \otimes s_i s_2
\end{tikzcd}$$

es decir θ_2 consiste en aplicar θ a la componente N y a la segunda componente S, dejando fija la primera. En términos del isomorfismo $\zeta : S \otimes_R S \to S \otimes_R S$ tal que $\zeta(s \otimes t) = t \otimes s$ tenemos

$$\theta_2 = (\mathrm{Id}_L \otimes \zeta) \circ (\theta \otimes \mathrm{Id}_S) \circ (\mathrm{Id}_N \otimes \zeta)$$

No es complicado ver que $u = \theta_2^{-1} \circ \theta_1 \in \mathrm{Aut}_{S''}(N \otimes_R S'')$ cumple la condición de cociclo, pero lo que veremos es que es exactamente igual al φ definido en el Lema 3.2.2. Según el diagrama (3.2.1), y siguiendo con la misma notación es que $\eta_L = \mathrm{Id}_L \otimes \zeta$ y $\eta = \eta^{-1} = \mathrm{Id}_N \otimes \zeta$. Por lo que

$$\varphi = \eta^{-1} \circ \psi = \eta \circ (\theta^{-1} \otimes \mathrm{Id}_S) \circ \eta_L \circ (\theta \otimes \mathrm{Id}_S)$$

Como $u = \theta_2^{-1} \circ \theta_1 = (\mathrm{Id}_N \otimes \zeta) \circ (\theta^{-1} \otimes \mathrm{Id}_S) \circ (\mathrm{Id}_L \otimes \zeta) \circ (\theta \otimes \mathrm{Id}_S)$, resultan iguales.

Veamos ahora que $L \simeq N_0 = \{x \in N \otimes_R S : u(\mathrm{Id}_N \otimes p_1(x)) = \mathrm{Id}_N \otimes p_2(x)\}$. Para eso veamos el siguiente diagrama conmutativo (cuyas filas son exactas, por el Teorema 2.2.8):

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & N \simeq N \otimes_R R \arrow[r] & N \otimes_R S \arrow[r, shift left, "\mathrm{Id}_N \otimes p_1"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{Id}_N \otimes p_2"'] \arrow[d, "\theta", "\simeq"'] & N \otimes_R S'' \arrow[d, shift right, "\theta_2"'] \arrow[d, shift left, "\theta_1"] \\
0 \arrow[r] & L \simeq L \otimes_R R \arrow[r] & L \otimes_R S \arrow[r, shift left, "\mathrm{Id}_L \otimes p_1"] \arrow[r, shift right, "\mathrm{Id}_L \otimes p_2"'] & L \otimes_R S''
\end{tikzcd}$$

Sea $\theta_0 = \theta|_{N_0}$. En principio toma valores en $L \otimes_R S$, pero ciertamente si $x \in N_0$, $\theta(x) \in L \otimes_R 1$: por el Teorema 2.2.8 basta ver que $\mathrm{Id}_L \otimes p_1(\theta(x)) = \mathrm{Id}_L \otimes p_2(\theta(x))$, pero como el diagrama es conmutativo, y recordando la definición de N_0 es que

$$\begin{aligned}
\mathrm{Id}_L \otimes p_2(\theta(x)) &= \theta_2\big(\mathrm{Id}_N \otimes p_2(x)\big) = \theta_2\big(u(\mathrm{Id}_N \otimes p_1(x))\big) = \theta_1\big(\mathrm{Id}_N \otimes p_1(x)\big) \\
&= \mathrm{Id}_L \otimes p_1(\theta(x))
\end{aligned}$$

Como el diagrama conmutativo tiene filas exactas y θ es isomorfismo, un simple "diagram chasing" prueba que θ_0 es sobreyectiva y por lo tanto un isomorfismo de N_0 en L. $\square$

3.3 Descenso en el caso de extensiones de Galois

En esta sección analizaremos la teoría de descenso (y por lo tanto las formas torcidas) en el caso de extensiones de Galois. El principal resultado es que para S/R una extensión de Galois y N un R-módulo, el conjunto de cohomología $H^1(S/R, \mathbf{Aut}(N))$ está en correspondencia con el conjunto en la cohomología no abeliana $H^1(\Gamma, \mathbf{Aut}(N)(S))$. Empecemos por recordar la definición de esta cohomología, para luego pasar al caso particular del grupo $\mathbf{Aut}(N)(S)$.

Definición 3.3.1 (Cohomología no abeliana). Sea S/R una extensión de Galois con grupo finito Γ. Consideremos que Γ actúa en un grupo X por automorfismos con la notación $\gamma \cdot x = {}^{\gamma}x$. Definimos el conjunto de los 1-cociclos como

$$Z^1(\Gamma, X) = \{u : \Gamma \to X : u_{\alpha\beta} = u_{\alpha}{}^{\alpha}(u_{\beta})\}$$

donde $u_\alpha = u(\alpha) \in X$.

Diremos que u, u' en $Z^1(\Gamma, X)$ son cohomólogos si y solo si existe algún $x \in X$ tal que para todo $\gamma \in \Gamma$

$$u'_\gamma = x^{-1} u_\gamma {}^{\gamma}x$$

Claramente es una relación de equivalencia. Llamamos $H^1(\Gamma, X)$ a su conjunto cociente.

Nos interesará el caso particular de $X = \mathbf{Aut}(N)(S) = \mathrm{Aut}_S(N \otimes_R S)$. El objetivo de esta sección es demostrar que

$$H^1(S/R, \mathbf{Aut}(N)) \longleftrightarrow H^1(\Gamma, \mathbf{Aut}(N)(S))$$

El caso $X = \mathbf{Aut}(N)(S)$:

Para la acción de Γ en S por automorfismos mantendermos la notación $\gamma(s) = {}^{\gamma}s$ y consideramos la acción de Γ en $N \otimes_R S$ en la componente S, es decir ${}^{\gamma}(x \otimes s) = x \otimes {}^{\gamma}s$. Para tener una acción de Γ en $X = \mathbf{Aut}(N)(S) = \mathrm{Aut}_S(N \otimes_R S)$, consideramos la acción por functorialidad. Antes de continuar, analicemos esta acción. Para abreviar la notación llamemos $\mathbf{G}$ al functor $\mathbf{Aut}(N)$. Sea $h \in \mathbf{G}(S)$, $\gamma \in \Gamma$. Como $\gamma : S \to S$, tenemos definido $\mathbf{G}(\gamma) : \mathbf{G}(S) \to \mathbf{G}(S)$. La acción entonces es

$${}^{\gamma}h = \mathbf{G}(\gamma)(h)$$

Esto significa que si $h(x \otimes 1) = \sum x_i \otimes s_i$, resulta que

$${}^{\gamma}h(x \otimes s) = \mathbf{G}(\gamma)(h)(x \otimes s) = \sum x_i \otimes {}^{\gamma}s_i s$$

Notemos que ${}^{\gamma}h = (\mathrm{Id}_N \otimes \gamma) \circ h \circ (\mathrm{Id}_N \otimes \gamma^{-1})$, pues al evaluarla en $x \otimes s$ obtenemos

$$(\mathrm{Id}_N \otimes \gamma) \circ h(x \otimes {}^{\gamma^{-1}}s) = (\mathrm{Id}_N \otimes \gamma)(\sum x_i \otimes {}^{\gamma^{-1}}s s_i) = \sum x_i \otimes s^{\gamma}s_i$$

En este caso nos queda entonces definido

$$\begin{aligned} Z^1(\Gamma, \mathbf{G}(S)) &= \{u : \Gamma \to \mathbf{G}(S) : u_{\alpha\beta} = u_{\alpha}{}^{\alpha}(u_{\beta})\} \\ &= \left\{u : \Gamma \to \mathbf{G}(S) : u_{\alpha\beta} = u_\alpha \circ (\mathrm{Id}_N \otimes \alpha) \circ u_\beta \circ (\mathrm{Id}_N \otimes \alpha^{-1})\right\} \end{aligned}$$

con la relación de equivalencia $u \sim u'$ si y solo si existe un $\lambda \in \mathbf{G}(S)$ tal que para todo $\alpha \in \Gamma$ resulta

$$u'_\alpha = \lambda^{-1} \circ u_\alpha \circ {}^{\alpha}\lambda = \lambda^{-1} \circ u_\alpha \circ (\mathrm{Id}_N \otimes \alpha^{-1}) \circ \lambda \circ (\mathrm{Id}_N \otimes \alpha)$$

Para la demostración del teorema buscamos una función que a cada elemento de $Z^1(S/R, \mathbf{G})$ le asigne un elemento de $Z^1(\Gamma, \mathbf{G}(S))$ y que en el cociente sea biyectiva. Por como están definidos los espacios de cociclos, empezaremos por una función $\rho : \mathbf{G}(S'') \to \{u : \Gamma \to \mathbf{G}(S)\}$. Empezemos por definir una función así, que luego verificaremos que completa la demostración del teorema. En primer lugar, recordemos que por ser S/R extensión de Galois, la función

$$\phi : S \otimes_R S \to \underbrace{S \times S \times \ldots \times S}_{|\Gamma| \text{ veces}} \text{ dado por } \phi(s \otimes t) = ({}^{\gamma}(s)t)_{\gamma \in \Gamma}$$

es un isomorfismo de S-álgebras tomando $S \otimes_R S$ como S-álgebra con el producto en la segunda coordenada. Esto inducirá el isomorfismo

$$S \otimes_R S \otimes_R S \xrightarrow{\simeq} \prod_{(\gamma,\tau) \in \Gamma \times \Gamma} S \quad \text{tal que } s \otimes t \otimes v \mapsto ({}^{\gamma}(s)^{\tau}(t)v)_{(\gamma,\tau) \in \Gamma}$$

A partir de los morfismos definidos en (2.2.1) y en (3.2.2), junto con los isomorfismos recién definidos tenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
S \arrow[r, shift left, "p_1"] \arrow[r, shift right, "p_2"'] \arrow[d, "\mathrm{Id}_S"'] & S \otimes_R S \arrow[r, shift left=2, "p_{ij}"] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d, "\simeq"'] & S \otimes_R S \otimes_R S \arrow[d, "\simeq"'] \\
S \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] & \prod_{\gamma \in \Gamma} S \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & \prod_{\Gamma \times \Gamma} S
\end{tikzcd}$$

donde las flechas de abajo están definidas para que el diagrama conmute. Aplicando el functor $\mathbf{G} = \mathbf{Aut}(N)$, considerando que el functor conmuta con los productos (Proposición 2.5.1) y haciendo la identificación obvia del producto con el espacio de funciones, obtenemos el siguiente diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathbf{G}(S) \arrow[r, shift left, "\mathbf{G}(p_1)"] \arrow[r, shift right, "\mathbf{G}(p_2)"'] \arrow[d] & \mathbf{G}(S \otimes_R S) \arrow[r, shift left=2, "\mathbf{G}(p_{ij})"] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathbf{G}(S \otimes_R S \otimes_R S) \arrow[d, "\simeq"'] \\
\mathbf{G}(S) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & \mathbf{G}(\prod_{\gamma\in\Gamma} S) \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d, "\simeq"'] & \mathbf{G}(\prod_{\Gamma\times\Gamma} S) \arrow[d, "\simeq"'] \\
\mathbf{G}(S) \arrow[r, shift left] \arrow[r, shift right] \arrow[d] & \prod_{\gamma\in\Gamma} \mathbf{G}(S) \arrow[r, shift left=2] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] \arrow[d, "\simeq"'] & \prod_{\Gamma\times\Gamma} \mathbf{G}(S) \arrow[d, "\simeq"'] \\
\mathbf{G}(S) \arrow[r, shift left, "\mathbf{F}(p_1)"] \arrow[r, shift right, "\mathbf{F}(p_2)"'] & \{u : \Gamma \to \mathbf{G}(S)\} \arrow[r, shift left=2, "\mathbf{F}(p_{ij})"] \arrow[r] \arrow[r, shift right=2] & \{u : \Gamma \times \Gamma \to \mathbf{G}(S)\}
\end{tikzcd}$$

Los morfismos que aparecen en el diagrama son:

- $\mathbf{G}(p_i)$ y $\mathbf{G}(p_{ij})$ están dados por el functor definido en la Sección 2.5.
- Llamemos ρ al isomorfismo vertical del centro. Dado $f \in \mathrm{Aut}_{S''}(N \otimes_R S'')$ tal que $f(a \otimes 1 \otimes 1) = \sum a_i \otimes s_i \otimes t_i$, tenemos $\rho(f) \in \{u : \Gamma \to \mathbf{G}(S)\}$ tal que para $\gamma \in \Gamma$
$$\rho(f)(\gamma)(a \otimes s) = \sum a_i \otimes \gamma(s_i) t_i s$$
- Llamemos ρ_2 al isomorfismo vertical de la derecha. Dado $h \in \mathrm{Aut}_{S'''}(N \otimes_R S''')$ tal que $h(a \otimes 1 \otimes 1 \otimes 1) = \sum a_i \otimes s_i \otimes t_i \otimes v_i$, tenemos $\rho_2(h) \in \{u : \Gamma \times \Gamma \to \mathbf{G}(S)\}$ tal que para $\gamma \in \Gamma$
$$\rho_2(h)(\gamma, \mu)(a \otimes s) = \sum a_i \otimes \gamma(s_i) \mu(t_i) v_i s$$
- $\mathbf{F}(p_i)$ y $\mathbf{F}(p_{ij})$ están definidos para que el diagrama conmute, resultando que para $f \in \mathrm{Aut}_S(N \otimes S)$ y para $\gamma \in \Gamma$
$$\mathbf{F}(p_1)(f)(\gamma) = {}^{\gamma} f \qquad \mathbf{F}(p_2)(f)(\gamma) = f$$
y para $u \in \{u : \Gamma \to \mathbf{G}(S)\}$, pensando $u = \rho(f)$ para un $f \in \mathrm{Aut}_{S''}(N \otimes_R S'')$ tal que $f(a \otimes 1 \otimes 1) = \sum a_i \otimes s_i \otimes t_i$, tenemos para $\gamma, \mu \in \Gamma$
$$\mathbf{F}(p_{13})(\rho(f))(\gamma, \mu)(a \otimes s) = \sum a_i \otimes \gamma(s_i) t_i s = \rho(f)(\gamma)(a \otimes s)$$
$$\mathbf{F}(p_{23})(\rho(f))(\gamma, \mu)(a \otimes s) = \sum a_i \otimes \mu(s_i) t_i s = \rho(f)(\mu)(a \otimes s)$$
$$\mathbf{F}(p_{12})(\rho(f))(\gamma, \mu)(a \otimes s) = \sum a_i \otimes \gamma(s_i) \mu(t_i) s = {}^{\mu}\big(\rho(f)(\mu^{-1}\gamma)\big)(a \otimes s)$$

Lema 3.3.2. *Los isomorfismos verticales ρ y ρ_2 cumplen*

(a) *Para todo $f, f' \in \mathbf{G}(S \otimes_R S)$, para todo $\gamma \in \Gamma$*

$$\rho(f \circ f')(\gamma) = \rho(f)(\gamma) \circ \rho(f')(\gamma)$$

(b) *Para todo $h, h' \in \mathbf{G}(S \otimes_R S \otimes_R S)$, para todo $(\gamma, \mu) \in \Gamma \times \Gamma$*

$$\rho_2(h \circ h')(\gamma, \mu) = \rho(h)(\gamma, \mu) \circ \rho(h')(\gamma, \mu)$$

Demostración. Veamos la demostración de (a), la otra será análoga. ρ es composición de tres isomorfismos que llamaremos ρ_a, ρ_b y ρ_c respectivamente para esta demostración. En primer lugar, $\rho_a(f \circ f') = \rho_a(f) \circ \rho_a(f')$, porque $\rho_a = \mathbf{G}(\phi)$ para ϕ definido en (2.3.1) y $\mathbf{G}$ es un functor de grupos. En segundo lugar tenemos que $\rho_b(\rho_a(f) \circ \rho_a(f')) = \rho_b(\rho_a(f)).\rho_b(\rho_a(f')) \in \prod_{\gamma\in\Gamma} \mathbf{G}(S)$ donde el producto es la operación de $\mathbf{G}(S)$ coordenada a coordenada. Finalmente, como para dos familias $(f_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ y $(f'_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}$ en $\prod_{\gamma\in\Gamma} \mathbf{G}(S)$ tenemos que

$$\begin{aligned}\rho_c\big((f_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}.(f'_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}\big)(\gamma) &= \rho_c\big((f_\gamma \circ f'_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}\big)(\gamma) = f_\gamma \circ f'_\gamma \\ &= \rho_c\big(f_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}\big)(\gamma) \circ \rho_c\big(f'_\gamma)_{\gamma\in\Gamma}\big)(\gamma)\end{aligned}$$

resulta que $\rho(f \circ f')(\gamma) = \rho(f)(\gamma) \circ \rho(f')(\gamma)$

□

Teorema 3.3.3. $H^1(S/R, \mathbf{G}) \longleftrightarrow H^1(\Gamma, \mathbf{G}(S))$

Demostración. Veamos que el morfismo ρ aplica elementos de $Z^1(S/R, \mathbf{G})$ en elementos de $Z^1(\Gamma, \mathbf{G}(S))$ y que en el cociente es biyectiva, es decir debemos verificar que

(a) $f \in \mathbf{G}(S \otimes S)$ es un cociclo si y solo si $\rho(f) \in \{u : \Gamma \to \mathbf{G}(S)\}$ es cociclo.

(b) $f \sim f' \in Z^1(S/R, \mathbf{G})$ si y solo si $\rho(f) \sim \rho(f') \in Z^1(\Gamma, \mathbf{G}(S))$.

Para ver (a):

$$\begin{aligned} f \in Z^1(S/R, \mathbf{G}) &\Leftrightarrow \mathbf{G}(p_{13})(f) = \mathbf{G}(p_{23})(f) \circ \mathbf{G}(p_{12})(f) \\ &\Leftrightarrow \rho_2\big(\mathbf{G}(p_{13})(f)\big) = \rho_2\big(\mathbf{G}(p_{23})(f) \circ \mathbf{G}(p_{12})(f)\big) \\ &\Leftrightarrow \forall (\gamma, \mu) \in \Gamma \times \Gamma \ \rho_2\big(\mathbf{G}(p_{13})(f)\big)(\gamma, \mu) = \\ &\qquad = \rho_2\big(\mathbf{G}(p_{23})(f)\big)(\gamma, \mu) \circ \rho_2\big(\mathbf{G}(p_{12})(f)\big)(\gamma, \mu) \\ &\Leftrightarrow \forall (\gamma, \mu) \in \Gamma \times \Gamma \ \mathbf{F}(p_{13})(\rho(f))(\gamma, \mu) = \\ &\qquad = \mathbf{F}(p_{23})(\rho(f))(\gamma, \mu) \circ \mathbf{F}(p_{12})(\rho(f))\big)(\gamma, \mu) \\ &\Leftrightarrow \forall (\gamma, \mu) \in \Gamma \times \Gamma \ \rho(f)(\gamma) = \rho(f)(\mu) \circ {}^{\mu}\big(\rho(f)(\mu^{-1}\gamma)\big) \end{aligned}$$

donde la segunda equivalencia es por el Lema 3.3.2 (b), la tercera porque el diagrama conmuta y la última por las definiciones de $\mathbf{F}(p_{ij})$. Si llamamos $\sigma = \mu^{-1}\gamma$, es decir $\gamma = \mu\sigma$ tenemos

$$\begin{aligned} f \in Z^1(S/R, \mathbf{G}) &\Leftrightarrow \forall (\mu, \sigma) \in \Gamma \times \Gamma \ \rho(f)(\mu\sigma) = \rho(f)(\mu) \circ {}^{\mu}\big(\rho(f)(\sigma)\big) \\ &\Leftrightarrow \forall (\mu, \sigma) \in \Gamma \times \Gamma \ \rho(f)_{\mu\sigma} = \rho(f)_{\mu} \circ {}^{\mu}\big(\rho(f)_{\sigma}\big) \\ &\Leftrightarrow \rho(f) \in Z^1(\Gamma, \mathbf{G}(S)) \end{aligned}$$

Para ver (b),

$$\begin{aligned} f \sim f' &\Leftrightarrow \exists h \in \mathbf{G}(S) : f' = \mathbf{G}(p_2)(h) \circ f \circ \big(\mathbf{G}(p_1)(h)\big)^{-1} \\ &\Leftrightarrow \exists h \in \mathbf{G}(S) : \rho(f') = \rho\Big(\mathbf{G}(p_2)(h) \circ f \circ \big(\mathbf{G}(p_1)(h)\big)^{-1}\Big) \\ &\Leftrightarrow \exists h \in \mathbf{G}(S), \forall \gamma \in \Gamma : \rho(f')(\gamma) = \rho(\mathbf{G}(p_2)(h))(\gamma) \circ \rho(f)(\gamma) \circ \rho(\big(\mathbf{G}(p_1)(h)\big)^{-1})(\gamma) \\ &\Leftrightarrow \exists h \in \mathbf{G}(S), \forall \gamma \in \Gamma : \rho(f')(\gamma) = \mathbf{F}(p_2)(h)(\gamma) \circ \rho(f)(\gamma) \circ \big(\mathbf{F}(p_1)(h)\big)^{-1})(\gamma) \\ &\Leftrightarrow \exists h \in \mathbf{G}(S), \forall \gamma \in \Gamma : \rho(f')(\gamma) = h \circ \rho(f)(\gamma) \circ {}^{\gamma}h^{-1} \\ &\Leftrightarrow \rho(f) \sim \rho(f') \end{aligned}$$

donde la segunda equivalencia es por el Lema 3.3.2 (a), la tercera porque el diagrama conmuta y la última por las definiciones de $\mathbf{F}(p_i)$. $\square$

Observación 3.3.4. Dada L una forma torcida de un R-módulo N, esta tiene asociado un cociclo $\varphi \in \mathbf{G}(S \otimes_R S)$ que la define, es decir

$$L \simeq \{x \in N \otimes_R S : \varphi(\mathrm{Id} \otimes p_1(x)) = \mathrm{Id} \otimes p_2(x)\}$$

Mediante el morfismo ρ, al cociclo le corresponde una función $u : \Gamma \to \mathbf{G}(S)$, es decir una familia $(u_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ de elementos de $G(S)$. La propiedad de cociclo se traduce en $u_{\alpha\beta} = u_\alpha {}^{\alpha}u_\beta$ y el módulo descendido es

$$\{x \in N \otimes_R S : u_\gamma {}^{\gamma}x = x \ \ \forall \gamma \in \Gamma\}.$$

Se puede verificar que ciertamente se trata del mismo conjunto. Los detalles, que no son completamente triviales, quedan a cargo del lector.

3.4 Descenso de álgebras centrales

Proposición 3.4.1. *Sea B una S/R-forma torcida de $A \otimes_k R$, tal que A es finitamente presentada como k-módulo, $R \in k$-**alg** tal que R/k es playo, $S \in R$-**alg** tal que S/R es fielmente playa. Si A es una k-álgebra central, entonces B es una R-álgebra central.*

Demostración. Para ver que B es R-álgebra central debemos ver que el morfismo $R \xrightarrow{\chi} \mathrm{Ctd}_R(B)$ dado por $r \mapsto \chi_r$ donde $\chi_r(b) = rb$ para todo $b \in B$ es un isomorfismo. Por ser S/R una extensión fielmente playa, bastará ver que $\chi \otimes \mathrm{Id}_S : R \otimes_R S \to \mathrm{Ctd}_R(B) \otimes_R S$ lo es, pero

$$S \simeq R \otimes_R S \overset{\chi \otimes \mathrm{Id}_S}{\to} \mathrm{Ctd}_R(B) \otimes_R S \overset{\omega_{\mathrm{Ctd}}}{\to} \mathrm{Ctd}_S(B \otimes_R S) \simeq \mathrm{Ctd}_S(A \otimes_k S) \simeq S$$

donde ω_{Ctd} es un isomorfismo por el Lema 2.4.2 (ahí es donde se usa la hipótesis de que A finitamente presentada, lo que implica que $A \otimes_k S \simeq B \otimes_R S$ lo sea y por lo tanto B lo es). Por otro lado, como A es central, el Lema 2.4.2 indica que $A \otimes_k S \simeq B \otimes_R S$ también lo es. Como la composición completa no es otra cosa que el isomorfismo identidad, resulta que $\chi \otimes \mathrm{Id}_S$ es un isomorfismo, por lo que χ lo es. $\square$

3.5 Ejemplo: álgebras de multilazos

Consideremos k un cuerpo algebraicamente cerrado, de característica 0 y $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie de dimensión finita, simple. Recordemos el Ejemplo 2.3.8, donde

$$R = k[t_1^{\pm 1}, \dots, t_n^{\pm 1}] \subset S = k[t_1^{\pm \frac{1}{m_1}}, \dots, t_n^{\pm \frac{1}{m_n}}]$$

es una extensión de Galois (con grupo $\Gamma \simeq \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/m_n\mathbb{Z}$) y tenemos fijado para cada m_i una raiz m_i-ésima primitiva de la unidad $\zeta_i \in k$. Definimos el álgebra (no torcida) de multilazos

$$\mathcal{L}(\mathfrak{g}) = \mathfrak{g} \otimes_k S$$

que es una k-álgebra de Lie (de dimensión infinita) con el corchete

$$[x \otimes t^\lambda, y \otimes t^\mu] = [x, y] \otimes t^{\lambda+\mu}$$

donde $\lambda = (\frac{\lambda_1}{m_1} \dots \frac{\lambda_n}{m_n})$ y $\mu = (\frac{\mu_1}{m_1} \dots \frac{\mu_n}{m_n})$ Si ahora agregamos una familia de automorfismos de $\mathfrak{g}$ que conmutan $\sigma = (\sigma_1, \dots, \sigma_n)$ de órdenes (finitos) $m_1, \dots, m_n$ respectivamente, podemos descomponer $\mathfrak{g}$ como suma directa de autoespacios: si $\overline{\Lambda} = \mathbb{Z}/m_1\mathbb{Z} \times \ldots \times \mathbb{Z}/m_n\mathbb{Z}$, $e = (e_1, \dots, e_n) \in \mathbb{Z}^n$ y llamamos $\overline{e}$ a su clase en $\overline{\Lambda}$,

$$\mathfrak{g} = \bigoplus_{\overline{e} \in \overline{\Lambda}} \mathfrak{g}_{\overline{e}} \quad \mathfrak{g}_{\overline{e}} = \{x \in \mathfrak{g} : \sigma_j(x) = \zeta_j^{e_j} x \text{ para todo } j\}$$

El álgebra de multilazos $\mathcal{L} = \mathcal{L}(\mathfrak{g}, \sigma)$ asociada a esos datos es la k-álgebra de Lie (de dimensión infinita)

$$\mathcal{L} = \bigoplus_{e \in \mathbb{Z}^n} \mathfrak{g}_{\overline{e}} \otimes_k t_1^{\frac{e_1}{m_1}} \dots t_n^{\frac{e_n}{m_n}} \subset \mathfrak{g} \otimes_k S$$

Ahora bien, como $\mathfrak{g}_{\overline{e}} = \mathfrak{g}_{\overline{e}+\overline{l}}$ para $l = (l_1, \ldots, l_n) \in m_1\mathbb{Z} \oplus \cdots \oplus m_n\mathbb{Z}$, es claro que $\mathcal{L}$ es una R-álgebra de Lie. Si llamamos $B_{\overline{e}}$ a una base de cada $\mathfrak{g}_{\overline{e}}$ como k-espacio vectorial, tendremos que una base para $\mathcal{L}$ es

$$\bigcup_{e\in E} B_{\overline{e}} \otimes t_1^{\frac{e_1}{m_1}} \ldots t_n^{\frac{e_n}{m_n}}$$

para $E = \{e = (e_1, \ldots, e_n) \in \mathbb{Z}^n : 0 \leq e_j \leq m_j - 1 \text{ para todo } j : 1 \ldots n\}$ por lo tanto $\mathcal{L}$ es un R-módulo libre de R-rango finito.

Proposición 3.5.1. *$\mathcal{L}$ es una S/R-forma torcida de $\mathfrak{g} \otimes_k R$.*[3]

Demostración. Para ver que es una S/R forma veamos explícitamente el cociclo en la cohomología de Galois, para el grupo Γ visto en el Ejemplo 2.3.8. Sea $u : \Gamma \to \mathrm{Aut}_S(\mathfrak{g} \otimes_k S)$ dado por $u_{\overline{e}} = v_{\overline{e}} \otimes \mathrm{Id}_S$ donde $v_{\overline{e}} \in \mathrm{Aut}(\mathfrak{g})$ es

$$v_{\overline{e}} = \sigma_1^{-e_1} \circ \ldots \circ \sigma_n^{-e_n}$$

Es fácil verificar que es un cociclo, pues los cociclos constantes son los morfismos de grupos:

$$\begin{aligned}
{}^{\alpha}u_\beta(x \otimes s) &= \big((\mathrm{Id} \otimes \alpha) \circ u_\beta \circ (\mathrm{Id} \otimes \alpha^{-1}\big)(x \otimes s) \\
&= (\mathrm{Id} \otimes \alpha)\big(u_\beta(x \otimes \alpha^{-1}(s))\big) = (\mathrm{Id} \otimes \alpha)\big(v_\beta(x) \otimes \alpha^{-1}(s)\big) \\
&= v_\beta(x) \otimes \alpha \circ \alpha^{-1}(s) = v_\beta(x) \otimes s = u_\beta(x \otimes s)
\end{aligned}$$

por lo tanto

$$u_{\alpha\beta} = u_\alpha {}^{\alpha}u_\beta \Leftrightarrow u_{\alpha\beta} = u_\alpha u_\beta \Leftrightarrow v_{\alpha\beta} = v_\alpha v_\beta$$

lo cual se cumple, pues

$$v_\alpha v_\beta = \sigma_1^{-\alpha_1} \circ \ldots \circ \sigma_n^{-\alpha_n} \circ \sigma_1^{-\beta_1} \circ \ldots \circ \sigma_n^{-\beta_n} = \sigma_1^{-\alpha_1-\beta_1} \circ \ldots \circ \sigma_n^{-\alpha_n-\beta_n} = v_{\alpha\beta}$$

Solo falta verificar que $M = \{z \in \mathfrak{g} \otimes_k S : u_{\overline{e}} {}^{\overline{e}}z = z \text{ para todo } \overline{e} \in \Gamma\} = \mathcal{L}$.

Sea $z \in \mathcal{L}$, $z = \sum_{i\in\mathbb{Z}^n} x_{\overline{i}} \otimes t_1^{\frac{i_1}{m_1}} \ldots t_n^{\frac{i_n}{m_n}}$ para $x_{\overline{i}} \in \mathfrak{g}_{\overline{i}}$ y sea $\overline{e} \in \overline{\Lambda}(\simeq \Gamma)$.

$$\begin{aligned}
u_{\overline{e}}({}^{\overline{e}}z) &= u_{\overline{e}}\Big(\sum_{i\in\mathbb{Z}^n} x_{\overline{i}}\zeta_1^{e_1 i_1} \ldots \zeta_n^{e_n i_n} \otimes t_1^{\frac{i_1}{m_1}} \ldots t_n^{\frac{i_n}{m_n}}\Big) \\
&= \sum_{i\in\mathbb{Z}^n} v_{\overline{e}}\big(x_{\overline{i}}\zeta_1^{e_1 i_1} \ldots \zeta_n^{e_n i_n}\big) \otimes t_1^{\frac{i_1}{m_1}} \ldots t_n^{\frac{i_n}{m_n}} \\
&= \sum_{i\in\mathbb{Z}^n} v_{\overline{e}}\big(\sigma_1^{e_1} \circ \ldots \circ \sigma_n^{e_n}(x_{\overline{i}})\big) \otimes t_1^{\frac{i_1}{m_1}} \ldots t_n^{\frac{i_n}{m_n}} \\
&= \sum_{i\in\mathbb{Z}^n} x_{\overline{i}} \otimes t_1^{\frac{i_1}{m_1}} \ldots t_n^{\frac{i_n}{m_n}} = z
\end{aligned}$$

[3]Esta proposición es [ABP2, Teorema 3.6], donde se presenta el cociclo, pero deja los detalles a cargo del lector.

Recíprocamente, si $z \in M$, sabemos que para todo $\overline{e} \in \Gamma$, $u_{\overline{e}}{}^{\overline{e}} z = z$. Digamos $z = \sum_{i\in\mathbb{Z}^n} x_{\overline{i}} \otimes t_1^{\frac{i_1}{m_1}} \dots t_n^{\frac{i_n}{m_n}}$, entonces

$$\sum_{i\in\mathbb{Z}^n} x_{\overline{i}} \otimes t_1^{\frac{i_1}{m_1}} \dots t_n^{\frac{i_n}{m_n}} = \sum_{i\in\mathbb{Z}^n} \sigma_1^{-e_1} \circ \dots \circ \sigma_n^{-e_n}\left(x_{\overline{i}}\zeta_1^{e_1 i_1} \dots \zeta_n^{e_n i_n}\right) \otimes t_1^{\frac{i_1}{m_1}} \dots t_n^{\frac{i_n}{m_n}}$$

Pero como los $t_1^{\frac{i_1}{m_1}} \dots t_n^{\frac{i_n}{m_n}}$ forman una base de S como k-espacio vectorial, tenemos escritura única (ver [B:A, Capítulo 2, §3.7 Corolario 1]). Así para cada $i \in \mathbb{Z}^n$ resulta

$$x_{\overline{i}} = \sigma_1^{-e_1} \circ \dots \circ \sigma_n^{-e_n}\left(x_{\overline{i}}\zeta_1^{e_1 i_1} \dots \zeta_n^{e_n i_n}\right)$$

por lo que $x_{\overline{i}} \in \mathfrak{g}_{\overline{i}}$, por lo tanto $z \in \mathcal{L}$.

□

Corolario 3.5.2. *$\mathcal{L}$ es una R-álgebra central, es decir* $\mathrm{Ctd}_R(\mathcal{L}) \simeq R$.

Demostración. En el caso planteado $\mathfrak{g}$ es central (ver Ejemplo 2.4.1), entonces por la Proposición 3.4.1, $\mathcal{L}$ lo es. Notemos que por ser k un cuerpo y $\mathfrak{g}$ de dimensión finita se cumplen las hipótesis necesarias. □

Ver $\mathcal{L}$ como k-álgebra no ayuda. Al introducir R, el álgebra $\mathcal{L}$, vista como R-álgebra es una forma torcida y por lo tanto nos permite utilizar la teoría de descenso. Desde ya que después uno tiene que finalizar las conclusiones obtenidas por este artificio (de introducir R), con el pasaje de R a k.

3.6 Descenso de functores estables por cambio de base

En esta sección vamos a demostrar que los functores de la categoría de álgebras a la categoría de módulos que son estables por cambio de base preservan S/R formas. Recordemos que estamos trabajando con k un anillo, conmutativo, asociativo, con 1 y denotamos k-**alg** la categoría de k-álgebras asociativas, conmutativas con 1.

Definición 3.6.1 (Categorías k-ALG, k-MOD). Dados un morfismo $\alpha : R \to S$ en en k-**alg**, M un R-módulo y N un S-módulo, decimos que un morfismo $f : M \to N$ es un *morfismo de módulos α-semilineal* si es aditivo y satisface $f(rm) = \alpha(r)f(m)$ para todo $r \in R$ y $m \in M$. Un morfismo así es necesariamente k-lineal, es decir si M y N son vistos como k-módulos por medio de $\sigma_{R,k}$ y $\sigma_{S,k}$ entonces $f(cm) = cf(m)$ para todo $c \in k$ y $m \in M$. Si M y N tienen estructura de álgebra y f preserva la multiplicación, entonces decimos que f es un *morfismo de álgebras α-semilineal.*

Dado un morfismo de módulos α-semilineal $f : M \to N$ y un morfismo $\beta : S \to T$ en k-**alg**, existe un único morfismo de módulos β-semilineal $f \otimes \beta : M \otimes_R S \to N \otimes_S T$ tal que $(f \otimes \beta)(m \otimes s) = f(m) \otimes \beta(s)$. Es claro que si f es un morfismo de álgebras, también lo será $f \otimes \beta$.

Definamos ahora la categoría k-**ALG**: sus objetos son pares (R, A) donde $R \in k$-**alg** y A es una R-álgebra. Recordemos que por R-álgebra entendemos un R-módulo A con una función R-bilineal $A \times A \to A$, $(a_1, a_2) \mapsto a_1 a_2$ a la cual no le pedimos otras identidades. Un morfismo en k-**ALG**, será un par $(\alpha, f) : (R, A) \to (S, B)$, formado por un morfismo $\alpha : R \to S$ en k-**alg** y un morfismo de álgebras α-semilineal $f : A \to B$.

La categoría k-**MOD** se define análogamente a k-**ALG**, reemplazando las álgebras por módulos y los morfismos de álgebras por morfismos de módulos. Así, un objeto en k-**MOD** es un par (R, M) que consiste en un $R \in k$-**alg** y un R-módulo M y un morfismo en k-**MOD** es un par $(\alpha, f) : (R, M) \to (S, N)$ que consiste en un morfismo $\alpha : R \to S$ es k-**alg** y un morfismo de módulos α-semilineal $f : M \to N$.

Definición 3.6.2 (Cambio de Base). Ambas categorías k-**ALG** y k-**MOD** admiten cambio de base por objetos de k-**alg**. Lo explicamos para k-**ALG**, mientras fijamos la notación. Sea $\alpha : R \to S$ un morfismo en k-**alg** y sea A una R-álgebra. Viendo S como R-álgebra mediante α, el producto tensorial $A \otimes_R S$ es una S-álgebra donde el producto esta dado por $(a_1 \otimes s_1)(a_2 \otimes s_2) = (a_1 a_2) \otimes (s_1 s_2)$ para $a_i \in A$ y $s_i \in S$. Como vamos a usar en ocasiones diferentes morfismos de R a S, volvemos a usar temporalmente la notación $A \otimes_\alpha S$ en lugar de la tradicional $A \otimes_R S$. Definimos

$$\alpha^A : A \to A \otimes_\alpha S, \quad a \mapsto a \otimes 1_S,$$

y notemos que $(\alpha, \alpha^A) : (R, A) \to (S, A \otimes_\alpha S)$ es un morfismo en k-**ALG**. De hecho, para cualquier morfismo $(\alpha, f) : (R, A) \to (S, B)$ en k-**ALG** existe un único morfismo de álgebras S-lineal $f^\alpha : A \otimes_\alpha S \to B$ que satisface $f^\alpha(a \otimes s) = sf(a)$. Como $f^\alpha \circ \alpha^A(a) = f^\alpha(a \otimes 1_S) = f(a)$, se deduce que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
(R, A) \arrow[rr, "(\alpha, f)"] \arrow[dr, "(\alpha, \alpha^A)"'] & & (S, B) \\
& (S, A \otimes_\alpha S) \arrow[ur, "(\mathrm{Id}_S, f^\alpha)"'] &
\end{tikzcd} \tag{3.6.1}$$

es conmutativo. Si ahora $\beta : S \to T$ es otro morfismo en k-**alg**, podemos agregarle al diagrama (3.6.1) el morfismo $(\beta,\beta^B):(S,B)\to(T,B\otimes_\beta T)$ y obtener el diagrama

$$
\begin{tikzcd}
(R,A) \arrow[r, "{(\alpha,f)}"] \arrow[d, "{(\alpha,\alpha^A)}"'] & (S,B) \arrow[d, "{(\beta,\beta^B)}"] \\
(S,A\otimes_\alpha S) \arrow[r, "{(\beta,f\otimes\beta)}"'] & (T,B\otimes_\beta T)
\end{tikzcd}
\tag{3.6.2}
$$

que también es conmutativo, pues $(\beta,f\otimes\beta)=(\beta,\beta^B)\circ(\mathrm{Id}_S,f^\alpha)$, así que al componer con (α,α^A) se obtiene la conmutatividad buscada.

Este último diagrama es lo que debemos entender como cambio de base de (α,f) por β.

Definición 3.6.3 (Functores sobre k-alg). La proyección sobre la primera componente define functores $\Pi_{\mathbf{A}}:k\text{-}\mathbf{ALG}\to k\text{-}\mathbf{alg}$ y $\Pi_{\mathbf{M}}:k\text{-}\mathbf{MOD}\to k\text{-}\mathbf{alg}$. Decimos que el functor $F:k\text{-}\mathbf{ALG}\to k\text{-}\mathbf{MOD}$ *es un functor sobre* k-**alg** si $\Pi_{\mathbf{M}}\circ F=\Pi_{\mathbf{A}}$, i.e.,

$$
\begin{tikzcd}
k\text{-}\mathbf{ALG} \arrow[rr, "F"] \arrow[dr, "\Pi_{\mathbf{A}}"'] & & k\text{-}\mathbf{MOD} \arrow[dl, "\Pi_{\mathbf{M}}"] \\
& k\text{-}\mathbf{alg} &
\end{tikzcd}
$$

es un diagrama conmutativo. Dichos functores F transforman un objeto $(R,A)\in k\text{-}\mathbf{ALG}$ en $F(R,A)=(R,F_R(A))$ para algún R-módulo $F_R(A)$, y un morfismo $(\alpha,f):(R,A)\to(S,B)$ en $F(\alpha,f)=(\alpha,F_\alpha(f))$ para algún morfismo α-semilineal $F_\alpha(f):F_R(A)\to F_S(B)$.
En lo que sigue, si $R=S$ y $\alpha=\mathrm{Id}_S$ simplemente escribimos $F(f)$ en lugar de $F_\alpha(f)$.

Dado un morfismo $\alpha:R\to S$ en k-**alg** y $(R,A)\in k\text{-}\mathbf{ALG}$, podemos aplicar F al morfismo $(\alpha,\alpha^A):(R,A)\to(S,A\otimes_\alpha S)$ en k-**ALG** de 3.6.2 y obtenemos un morfismo en k-**MOD**

$$F(\alpha,\alpha^A)=(\alpha,F_\alpha(\alpha^A)):(R,F_R(A))\to(S,F_S(A\otimes_\alpha S)).$$

Como esta función es α-semilineal, induce un morfismo de S-módulos

$$\nu^F_{A,\alpha}:F_R(A)\otimes_\alpha S\to F_S(A\otimes_\alpha S),\quad m\otimes s\mapsto sF_\alpha(\alpha^A)(m) \tag{3.6.3}$$

Estos morfismos jugarán un papel muy importante a la hora de definir functores estables por cambio de base. En lo que sigue, si F está fijo denotaremos a $\nu^F_{A,\alpha}$ simplemente como $\nu_{A,\alpha}$.

Lema 3.6.4. *Dado un functor $F : k$-**ALG** $\to k$-**MOD** sobre k-**alg**:*

(a) (F y ν conmutan) *Sea $(\alpha, f) : (R, A) \to (S, B)$ un morfismo en k-**ALG** y sea $\beta : S \to T$ un morfismo en k-**alg**. Entonces el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
F_R(A) \otimes_\alpha S \arrow[r, "F_\alpha(f)\otimes\beta"] \arrow[d, "\nu_{A,\alpha}"'] & F_S(B) \otimes_\beta T \arrow[d, "\nu_{B,\beta}"] \\
F_S(A \otimes_\alpha S) \arrow[r, "F_\beta(f\otimes\beta)"'] & F_T(B \otimes_\beta T)
\end{tikzcd}$$

conmuta.

(b) (Transitividad) *Sean $R \xrightarrow{\alpha} S \xrightarrow{\beta} T$ morfismos en k-**alg** y sea $(R, A) \in k$-**ALG**. Entonces el diagrama*

$$\begin{tikzcd}
F_R(A) \otimes_\alpha S \arrow[r, "\mathrm{Id}_{F_R(A)}\otimes\beta"] \arrow[d, "\nu_{A,\alpha}"'] & F_R(A) \otimes_{\beta\circ\alpha} T \arrow[d, "\nu_{A,\beta\circ\alpha}"] \\
F_S(A \otimes_\alpha S) \arrow[r, "F_\beta(\mathrm{Id}_A\otimes\beta)"'] & F_T(A \otimes_{\beta\circ\alpha} T)
\end{tikzcd}$$

conmuta.

Demostración. (a) Los morfismos $f \otimes \beta$ y $F_\alpha(f) \otimes \beta$ son los descriptos en las definiciones 3.6.1 y 3.6.2 y la fila horizontal de abajo se obtiene de aplicar F a $(\beta, f \otimes \beta)$. Para $m \in F_R(A)$ y $s \in S$ tenemos que

$$\big(\nu_{B,\beta} \circ (F_\alpha(f) \otimes \beta)\big)(m \otimes s) = \beta(s)F_\beta(\beta^B)\big(F_\alpha(f)(m)\big), \text{ y}$$
$$\big(F_\beta(f \otimes \beta) \circ \nu_{A,\alpha}\big)(m \otimes s) = \beta(s)F_\beta(f \otimes \beta)\big(F_\alpha(\alpha^A)(m)\big).$$

Por lo tanto basta probar que $F_\beta(\beta^B) \circ F_\alpha(f) = F_\beta(f \otimes \beta) \circ F_\alpha(\alpha^A)$. Pero esto se sigue de aplicar el functor F al diagrama conmutativo (3.6.2).

(b) Con la notación de (a) tenemos que

$$\big(\nu_{A,\beta\circ\alpha} \circ (\mathrm{Id} \otimes\beta)\big)(m \otimes s) = \beta(s)\, F_{\beta\circ\alpha}\big((\beta \circ \alpha)^A\big)(m), \text{ y}$$
$$(F_\beta(\mathrm{Id}_A \otimes\beta) \circ \nu_{A,\alpha})\,(m \otimes s) = \beta(s)F_\beta(\mathrm{Id}_A \otimes\beta)\, F_\alpha(\alpha^A)\,(m).$$

Así que basta probar que $F\big((\beta \circ \alpha)^A\big) = F_\beta(\mathrm{Id}_A \otimes\beta) \circ F_\alpha(\alpha^A)$. Primero notemos que $\big((\beta \circ \alpha), (\beta \circ \alpha)^A\big) = (\beta, \mathrm{Id}_A \otimes\beta) \circ (\alpha, \alpha^A)$, pues

$$\big((\mathrm{Id}_A \otimes\beta) \circ \alpha^A\big)(a) = (\mathrm{Id}_A \otimes\beta)(a \otimes 1_S) = (a \otimes 1_T) = (\beta \circ \alpha)^A(a)$$

Ahora aplicando F, por functorialidad, se obtiene lo deseado. $\square$

Definición 3.6.5 (Functores estables por cambio de base). Sea $F : k$-**ALG** $\to$ k-**MOD** un functor sobre k-**alg**. Decimos que F *es estable por cambio de base* si para todo morfismo $\alpha \in k$-**alg** y para todo $(R, A) \in k$-**ALG** el morfismo de S-módulos $\nu^F_{A,\alpha} : F_R(A) \otimes_\alpha S \to F_S(A \otimes_\alpha S)$ definido en (3.6.3) es un isomorfismo.

Ejemplo 3.6.6. El ejemplo más relevante para este trabajo será el "functor de formas bilineales invariantes" **IBF** que definiremos en 5.1.4 y demostraremos en la Proposición 5.2.5(b) que es estable por cambio de base. El primer ejemplo que veremos ahora es simplemente el functor $F : k$-**ALG** $\to k$-**MOD** sobre k-**alg** "producto tensorial" que a cada (R, A) le asigna el R-módulo $A \otimes_R A$ y a cada morfismo $(\alpha, f) : (R, A) \to (S, B)$ en k-**ALG** le asigna el morfismo

$$f \otimes f : A \otimes_R A \to B \otimes_S B, \quad a_1 \otimes a_2 \mapsto f(a_1) \otimes f(a_2)$$

que es α-bilineal. Si ahora aplicamos F al morfismo $(\alpha, \alpha^A) : (R, A) \to (S, A \otimes_\alpha S)$ en k-**ALG** obtenemos

$$F(\alpha, \alpha^A) = (\alpha, F_\alpha(\alpha^A)) : (R, F_R(A)) \to (S, F_S(A \otimes_\alpha S)) \quad F_\alpha(\alpha^A) = \alpha^A \otimes \alpha^A.$$

y el morfismo de S-módulos inducido resulta

$$\nu^F_{A,\alpha} : (A \otimes_R A) \otimes_R S \to (A \otimes_R S) \otimes_S (A \otimes_R S)$$

$$a \otimes a' \otimes s \mapsto s(\alpha^A(a) \otimes \alpha^A(a')) = s(a \otimes 1_R \otimes a' \otimes 1_R) = a \otimes 1_R \otimes a' \otimes s$$

que es el conocido isomorfismo canónico de (2.1.1).

Teorema 3.6.7. *Sea A una R-álgebra, y B una S/R forma de A determinada por el cociclo u como se vio anterioremente. Si $F : k$-**ALG** $\to k$-**MOD** es un functor sobre k-**alg** estable por cambio de base, entonces $F_R(B)$ es una S/R-forma del R-módulo $F_R(A)$ que es isomorfa como R-módulo al dado por el cociclo*

$$\nu^{-1}_{A,p_2\circ\alpha} \circ F(u) \circ \nu_{A,p_1\circ\alpha} \in \mathrm{Aut}_{S''}\big(F_R(A) \otimes_R S''\big).$$

Demostración. Fijemos un isomorfismo de S-álgebras $\theta : A \otimes_\alpha S \to B \otimes_\alpha S$. Según lo visto en el Teorema 3.2.5, el cociclo que determina B (salvo isomorfismo de R-álgebras) es $u = \theta_2^{-1} \circ \theta_1 \in \mathrm{Aut}_{S''}(A \otimes_R S'')$. Con la functorialidad de F y recordando que $p_1 \otimes \alpha = p_2 \otimes \alpha$ (ver Observación 2.2.9), el resultado que debemos establecer es:

(a) $z := \big(\nu^{-1}_{A,p_2\circ\alpha} \circ F(\theta_2)^{-1} \circ \nu_{B,p_2\circ\alpha}\big) \circ \big(\nu^{-1}_{B,p_1\circ\alpha} \circ F(\theta_1) \circ \nu_{A,p_1\circ\alpha}\big) \in \mathrm{Aut}_{S''}\big(F_R(A) \otimes_R S''\big)$ es un cociclo.

(b) El R-módulo determinado por el cociclo z es isomorfo a $F_R(B)$.

Definamos $F^\nu(\theta) = \nu_{B,\alpha}^{-1} \circ F(\theta) \circ \nu_{A,\alpha}$ mediante el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
F_R(A) \otimes_\alpha S \arrow[r, "F^\nu(\theta)"] \arrow[d, "\nu_{A,\alpha}"'] & F_R(B) \otimes_\alpha S \\
F_S(A \otimes_\alpha S) \arrow[r, "F(\theta)"] & F_S(B \otimes_\alpha S) \arrow[u, "(\nu_{B,\alpha})^{-1}"']
\end{tikzcd}$$

Para probar ambas cosas debemos ver que el cociclo planteado coincide con el visto en la construcción: $\big(F^\nu(\theta)\big)_2^{-1} \circ \big(F^\nu(\theta)\big)_1$, es decir que debemos ver que

$$\nu_{B,\alpha_i\circ\alpha}^{-1} \circ F(\theta_i) \circ \nu_{A,\alpha_i\circ\alpha} = \big(F^\nu(\theta)\big)_i \quad \text{for } i = 1, 2.$$

Los casos $i = 1, 2$ son similares, veremos en detalle el caso $i = 1$. Consideremos el siguiente diagrama conmutativo de isomorfismos de S''-módulos.

$$\begin{tikzcd}
F_R(A) \otimes_{p_1\circ\alpha} S'' \arrow[r, "\big(F^\nu(\theta)\big)_1"] \arrow[d, "(\mathrm{Id}_{F_R(A)} \otimes \tau_1)^{-1}"'] \arrow[dddd, dotted, bend right=60, "\nu_{A,p_1\circ\alpha}"'] & F_R(B) \otimes_{p_1\circ\alpha} S'' \arrow[d, "(\mathrm{Id}_{F_R(B)} \otimes \tau_1)^{-1}"] \arrow[dddd, dotted, bend left=60, "\nu_{B,p_1\circ\alpha}"] \\
F_R(A) \otimes_\alpha S \otimes_{p_1} S'' \arrow[r, "F^\nu(\theta)\otimes \mathrm{Id}_{S''}"] \arrow[d, "\nu_{A,\alpha}\otimes \mathrm{Id}_{S''}"'] & F_R(B) \otimes_\alpha S \otimes_{p_1} S'' \arrow[d, "\nu_{B,\alpha}\otimes \mathrm{Id}_{S''}"] \\
F_S(A \otimes_\alpha S) \otimes_{p_1} S'' \arrow[r, "F(\theta)\otimes \mathrm{Id}_{S''}"] \arrow[d, "\nu_{A\otimes_\alpha S, p_1}"'] & F_S(B \otimes_\alpha S) \otimes_{p_1} S'' \arrow[d, "\nu_{B\otimes_\alpha S, p_1}"] \\
F_{S''}\big((A \otimes_\alpha S) \otimes_{p_1} S''\big) \arrow[r, "F(\theta\otimes_{p_1} \mathrm{Id}_{S''})"] \arrow[d, "F(\mathrm{Id}_A \otimes \tau_1)"'] & F_{S''}\big((B \otimes_\alpha S) \otimes_{p_1} S''\big) \arrow[d, "F(\mathrm{Id}_B \otimes \tau_1)"] \\
F_{S''}(A \otimes_{p_1\circ\alpha} S) \arrow[r, "F(\theta_1)"] & F_{S''}(B \otimes_{p_1\circ\alpha} S'')
\end{tikzcd}$$

El rectángulo de arriba conmuta, por la definición de $F^\nu(\theta_1)$; el segundo resulta de aplicar el cambio de base $p_1 : S \to S''$ al diagrama que define $F^\nu(\theta)$; el tercero conmuta por el Lema 3.6.4(a) para el caso que $(R, A), (S, B), (\alpha, f)$ y β son respectivamente $(S, A \otimes_\alpha S), (S, B \otimes_\alpha S), (\mathrm{Id}_S, \theta)$ y $\mathrm{Id}_{S''}$; finalmente, el de abajo de todo conmuta, aplicando F al diagrama (3.2.3) que define θ_1. Entonces será suficiente probar que las líneas punteadas verticales son respectivamente $\nu_{A,p_1\circ\alpha}$ y $\nu_{B,p_1\circ\alpha}$. Otra vez son análogas, así que haremos en detalle el caso $\nu_{A,p_1\circ\alpha}$, siguiendo explícitamente las flechas verticales de la izquierda. Sean $m \in F_R(A)$ y $s_1, s_2 \in S$. Entonces

$$\begin{aligned}
m \otimes s_1 \otimes s_2 &\xmapsto{(\mathrm{Id}_{F_R(A)} \otimes \tau_1)^{-1}} m \otimes s_1 \otimes 1_S \otimes s_2 \xmapsto{\nu_{A,\alpha} \otimes \mathrm{Id}_{S''}} \big(s_1 F_\alpha(\alpha^A)(m)\big) \otimes (1_S \otimes s_2) \\
&\xmapsto{\nu_{A \otimes_\alpha S, p_1}} (1_S \otimes s_2)\Big(F_{p_1}(p_1^{A \otimes_\alpha S})\big(s_1 F_\alpha(\alpha^A)(m)\big)\Big) \\
&= (1_S \otimes s_2)\Big(p_1(s_1) F_{p_1}(p_1^{A \otimes_\alpha S})\big(F_\alpha(\alpha^A)(m)\big)\Big) \\
&= (1_S \otimes s_2)(s_1 \otimes 1_S)\Big(F_{p_1}(p_1^{A \otimes_\alpha S})\big(F_\alpha(\alpha^A)(m)\big)\Big) \\
&= (s_1 \otimes s_2)\Big(F_{p_1}(p_1^{A \otimes_\alpha S})\big(F_\alpha(\alpha^A)(m)\big)\Big) \\
&\xmapsto{F(\mathrm{Id}_A \otimes \tau_1)} (s_1 \otimes s_2) F(\mathrm{Id}_A \otimes \tau_1)\Big(F_{p_1}(p_1^{A \otimes_\alpha S})\big(F_\alpha(\alpha^A)(m)\big)\Big) \\
&= (s_1 \otimes s_2)\, F_{p_1 \circ \alpha}\big((p_1 \circ \alpha)^A(m)\big).
\end{aligned}$$

Esto completa la demostración ya que por definición

$$\nu_{A, p_1 \circ \alpha}(m \otimes s_1 \otimes s_2) = (s_1 \otimes s_2)\, F_{p_1 \circ \alpha}\big((p_1 \circ \alpha)^A(m)\big)$$

$\square$

Capítulo 4

Caso de Módulos: Diferenciales de Kähler

En este capítulo vamos a aplicar la teoría de descenso al módulo de diferenciales de Kähler en el caso de una extensión de Galois. El objetivo es probar que los invariantes por la acción del grupo de Galois de S/R en $\Omega_S/d_S(S)$ son precisamente los elementos de $\Omega_R/d_R(R)$. Para eso hay que ver previamente a este último como submódulo. Los diferenciales en cuestión aparecen en las extensiones centrales de EALAs, por lo que resultará interesante para el trabajo futuro conocer cómo "descienden". Este capítulo tendrá un rol importante en [PPS].

4.1 Invariantes por la acción de Γ en extensiones de Galois

Sea S/R una extensión de Galois finita con grupo Γ y M un R-módulo. Γ actúa en S mediante automorfismos, permitiendo definir una acción (no torcida) en $M \otimes_R S$ vía ${}^{\gamma}(m \otimes s) = m \otimes \gamma(s)$. Cabe mencionar que estamos considerando que Γ actúa trivialmente en M. El objetivo de esta sección es probar que

$$(M \otimes_R S)^{\Gamma} = \{x \in M \otimes_R S : {}^{\gamma}x = x \text{ para todo } \gamma \in \Gamma\} = M \otimes_R 1 \simeq M$$

Para tal fin reescribamos este conjunto mediante isomorfismos que surgen de la teoría de descenso en el caso de extensiones de Galois.

Como primer paso, vamos a considerar el isomorfismo que resulta de tensorizar el isomorfismo (2.3.1) con la identidad de M. Luego de componer con el isomorfismo canónico de productos tensoriales y productos directos, obtenemos el isomorfismo de

S-álgebras.

$$M \otimes_R S \otimes_R S \xrightarrow{\mathrm{Id}_M \otimes \phi} M \otimes_R \prod_{\gamma \in \Gamma} S \xrightarrow{\simeq} \prod_{\gamma \in \Gamma} M \otimes_R S \tag{4.1.1}$$

Por otro lado, por el Teorema 2.2.8, sabemos que

$$M \simeq M \otimes_R R = \{x \in M \otimes S : \mathrm{Id} \otimes p_1(x) = \mathrm{Id} \otimes p_2(x)\}$$

Esto nos permite plantear la sucesión que identifica M con el núcleo de la resta de las dos flechas.

$$0 \longrightarrow M \simeq M \otimes_R R \xrightarrow{i} M \otimes_R S \underset{\mathrm{Id}_M \otimes p_2}{\overset{\mathrm{Id}_M \otimes p_1}{\rightrightarrows}} M \otimes_R S \otimes_R S$$

Finalmente, usando la identificación del producto cartesiano como espacio de funciones de la siguiente manera (digamos $|\Gamma| = r$):

$$\prod_{\gamma \in \Gamma} M \otimes_R S \xrightarrow{\simeq} \{\varphi : \Gamma \to M \otimes_R S\}$$

$$(m_1 \otimes s_1, m_2 \otimes s_2, \ldots, m_r \otimes s_r) \mapsto \varphi \text{ tal que } \varphi(\gamma_i) = m_i \otimes s_i$$

tenemos la siguiente sucesión exacta

$$0 \longrightarrow M \simeq M \otimes_R R \xrightarrow{i} M \otimes_R S \underset{q_2}{\overset{q_1}{\rightrightarrows}} \{\varphi : \Gamma \to M \otimes_R S\}$$

donde los q_i surgen de componer $\mathrm{Id}_M \otimes p_i$ con el isomorfismo (4.1.1), y lo que se obtiene no es otra cosa que

$$q_1(m \otimes s) = \varphi_{1,m\otimes s} \quad \text{tal que} \quad \varphi_{1,m\otimes s}(\gamma) = m \otimes \gamma(s)$$

$$q_2(m \otimes s) = \varphi_{2,m\otimes s} \quad \text{tal que} \quad \varphi_{2,m\otimes s}(\gamma) = m \otimes s$$

Ahora los elementos de M son aquellos en los que coinciden las q_i, ie.

$$M \simeq M \otimes_R R = \{x \in M \otimes S : q_1(x) = q_2(x)\}$$

Para analizar invariantes, veamos cómo se traduce la acción de Γ en $\{\varphi : \Gamma \to M \otimes_R S\}$

Lema 4.1.1. *Se puede definir en $\{\varphi : \Gamma \to M \otimes_R S\}$ una acción de Γ tal que si $\tau \in \Gamma$ y $\varphi \in \{\varphi : \Gamma \to M \otimes_R S\}$ entonces*

$$({}^{\tau}\varphi)(\gamma) = \underbrace{{}^{\tau}\Big(\underbrace{\varphi(\tau^{-1} \circ \gamma \circ \tau)}_{\in M \otimes_R S}\Big)}_{\textit{acción de } \Gamma \textit{ en } M \otimes_R S}$$

Esta acción conmuta con cada una de las q_i.

Demostración. En principio, afirmamos que es acción, porque proviene de componer la acción en $M \otimes_R S$ con la conjugación en Γ. Ciertamente conmuta con cada una de las q_i, es decir para $i = 1, 2$ resulta $q_i({}^\tau m \otimes s) = {}^\tau q_i(m \otimes s)$, pues

$$\begin{aligned} {}^\tau q_1(m \otimes s)(\gamma) &= {}^\tau\big(q_1(m \otimes s)(\tau^{-1} \circ \gamma \circ \tau)\big) = {}^\tau\big(m \otimes (\tau^{-1} \circ \gamma \circ \tau)(s)\big) \\ &= m \otimes (\gamma \circ \tau)(s) = q_1(m \otimes \tau(s))(\gamma) = q_1({}^\tau m \otimes s)(\gamma) \end{aligned}$$

y

$$\begin{aligned} {}^\tau q_2(m \otimes s)(\gamma) &= {}^\tau\big(q_2(m \otimes s)(\tau^{-1} \circ \gamma \circ \tau)\big) = {}^\tau(m \otimes s) = m \otimes \tau(s) \\ &= q_2(m \otimes \tau(s))(\gamma) = q_2({}^\tau m \otimes s)(\gamma) \end{aligned}$$

□

Teorema 4.1.2. *Sea S/R una extensión de Galois de anillos y M un R-módulo. Para la acción de Γ en $M \otimes_R S$ dada por ${}^\gamma(m \otimes s) = m \otimes \gamma(s)$ los invariantes son los elementos de la forma $m \otimes 1$, es decir*

$$(M \otimes_R S)^\Gamma = M \otimes_R 1 \simeq M$$

Demostración. Claramente $M \otimes 1 \subseteq (M \otimes_R S)^\Gamma$. Para la otra inclusión, consideremos $x = \sum m_i \otimes s_i \in (M \otimes_R S)^\Gamma$. Veamos que $x \in M \otimes 1$, viendo que $q_1(x) = q_2(x)$. Por un lado,

$$q_1(x)(\gamma) = q_1\big(\sum m_i \otimes s_i\big)(\gamma) = \sum m_i \otimes \gamma(s_i)$$

Por otro lado,

$$\begin{aligned} q_2(x)(\gamma) &=^{x \in (M \otimes_R S)^\Gamma} q_2({}^\gamma x)(\gamma) \\ &=^{\text{la acción conmuta}} \big({}^\gamma q_2(x)\big)(\gamma) \\ &= {}^\gamma\big(q_2(x)(\gamma^{-1} \circ \gamma \circ \gamma)\big) \\ &= {}^\gamma\big(q_2(x)(\gamma)\big) \\ &= {}^\gamma\big(q_2(\sum m_i \otimes s_i)(\gamma)\big) \\ &= {}^\gamma\big(\sum m_i \otimes s_i\big) \\ &= \sum m_i \otimes \gamma(s_i) \end{aligned}$$

Por lo tanto, $x \in M \otimes 1$ y tenemos la igualdad deseada. □

4.2 Diferenciales de Kähler

Sea k un cuerpo de característica 0 y S/R una extensión de Galois de k-álgebras con grupo finito Γ. En esta sección vamos a estudiar el S-módulo de diferenciales de Kähler $\Omega_{S,k}$ y su relación con el R-módulo $\Omega_{R,k}$. Recordemos brevemente la definición y algunas propiedades. Para más detalles se puede consultar [EGA IV, Ch.0, §20].

Definición 4.2.1 (Derivaciones de R en M). Sea $R \in k$-**alg** y M un R-módulo. Una k-derivación de R con valores en M es un morfismo k-lineal $D : R \to M$ tal que

$$D(rt) = rD(t) + tD(r)$$

Denotamos como $\mathrm{Der}_k(R, M)$ al k-espacio de derivaciones de R con valores en M.

Proposición 4.2.2. *Sea $R \in k$-**alg**. Existe un R-módulo $\Omega_{R,k}$ y una derivación $d_{\text{univ}} : R \to \Omega_{R,k}$ que satisfacen la siguiente propiedad universal: para todo R-módulo M hay un isomorfismo canónico*

$$\mathrm{Hom}_R(\Omega_{R,k}, M) \simeq \mathrm{Der}_k(R, M) \tag{4.2.1}$$

dado por la composición de la derivación d_{univ} con cada función de $\Omega_{R,k} \to M$.

Observación 4.2.3. La proposición nos dice que cada k-derivación $d : R \to M$ se factoriza de manera única por la derivación universal, es decir que el siguiente diagrama conmutativo se puede completar de manera única con un R-morfismo de $\Omega_{R,k} \to M$.

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "d"] \arrow[d, "d_{\text{univ}}"'] & M \\ \Omega_{R,k} \arrow[ur] & \end{tikzcd}$$

Demostración. La demostración de la existencia consiste en la construcción de un R-módulo libre y el cociente con las relaciones deseadas: definimos $\Omega_{R,k}$ como el cociente del R-módulo libre generado por elementos dr para $r \in R$ con las relaciones

1. $d(r + t) = dr + dt$.
2. $d(rt) = rdt + tdr$.
3. $d(\lambda) = 0$

para $r, t \in R$ y $\lambda \in k$ y d_{univ} como el morfismo k-lineal tal que $r \mapsto dr$. Por definición es una derivación $R \to \Omega_{R,k}$ y para cada $f \in \mathrm{Hom}_R(\Omega_{R,k}, M)$, $f \circ d_{\text{univ}}$ es una k-derivación.

Para ver que la función tal que a cada $f \in \mathrm{Hom}_R(\Omega_{R,k}, M)$ le asigna la derivación $f \circ d_{\text{univ}}$ es un isomorfismo, definamos una inversa: para cada $\delta \in \mathrm{Der}_k(R, M)$, existe una función $f_\delta \in \mathrm{Hom}_R(\Omega_{R,k}, M)$ tal que $f_\delta(tdr) = t\delta(r)$ (para su existencia basta con definirla en el R-módulo libre considerado anteriormente y verificar que satisface las relaciones dadas). Resulta inmediato que son inversas entre sí, por lo que tenemos el isomorfismo deseado. $\square$

Definición 4.2.4. $\Omega_{R,k}$ se denomina *Módulo de Diferenciales de Kähler de R (relativo a k)*. Cuando no sea confuso denotaremos $\Omega_{R,k} = \Omega_R$.

Lema 4.2.5. *Sea $S \in k$-**alg**, Γ un grupo de automorfismos de S. Denotando $\gamma(s) = {}^{\gamma}s$, existe una única acción de Γ en $\Omega_{S,k}$ tal que*

$$^{\gamma}(sdt) = {}^{\gamma}s \; d^{\gamma}t$$

Demostración. Se puede definir la acción en el S-módulo libre con generadores $\{ds\}_{s\in S}$ y es directo verificar que satisface las relaciones que definen $\Omega_{S,k}$. $\square$

Ahora consideremos una extensión de k-álgebras $\alpha : S \to R$ y relacionemos $\Omega_{S,k} = \Omega_S$ con $\Omega_{R,k} = \Omega_R$. Denotemos $d_{S,k} = d_S : S \to \Omega_S$ y $d_{R,k} = d_R : R \to \Omega_R$ a las derivaciones universales. Como $d_S \circ \alpha \in \mathrm{Der}_k(R, \Omega_S)$ podemos aplicar (4.2.1) para tener un único morfismo de R-módulos $\chi \in \mathrm{Hom}_R(\Omega_R, \Omega_S)$ que hace conmutar el diagrama

$$\begin{tikzcd} R \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "d_R"] & S \arrow[d, "d_S"] \\ \Omega_R \arrow[r, "\chi"] & \Omega_S \end{tikzcd}$$

Notemos que Ω_S es un R-módulo vía α, por ser S-módulo. Entonces, según lo definido en la Proposición 4.2.2, χ es tal que

$$rd_R(t) \mapsto \alpha(r)d_S(\alpha(t))$$

En el caso en que S/R es una extensión de Galois con grupo Γ, es claro que la acción de Γ definida en el Lema 4.2.5 conmuta con el morfismo χ. Recordemos que por tratarse de una extensión de Galois, podemos identificar a R como un subanillo de S y que los elementos de R son los elementos de S que quedan fijos por la acción de Γ.

Lema 4.2.6. *Sea S/R una extensión de Galois de anillos con grupo Γ. El morfismo de S-módulos*

$$\Omega_R \otimes_R S \xrightarrow{\Phi} \Omega_S \qquad\qquad \Phi(\omega \otimes s) = s\chi(\omega)$$

es isomorfismo y conmuta con la acción de Γ[1].

Demostración. La demostración de que Φ es isomorfismo puede verse en [EGA IV, Ch.0, §20 Corolario 20.5.8]. Ciertamente conmuta con la acción, pues

$$^{\gamma}\Phi(\omega \otimes s) = {}^{\gamma}(s\chi(\omega)) = {}^{\gamma}s\chi({}^{\gamma}\omega) = {}^{\gamma}s\chi(\omega) = \Phi(\omega \otimes {}^{\gamma}s) = \Phi({}^{\gamma}(\omega \otimes s))$$

$\square$

[1] La acción de Γ en $\Omega_R \otimes_R S$ es en S, tal como se trabajó en la Sección 4.1.

Observación 4.2.7. Si S/R es extensión de Galois (por lo tanto fielmente playa), el morfismo $\Omega_R \to \Omega_R \otimes_R S$ tal que $\omega \mapsto \omega \otimes 1$ es inyectivo (por la Proposición 2.2.5). Al componerlo con el isomorfismo del Lema 4.2.6 obtenemos χ, por lo que será inyectiva. Esto nos permitirá ver $\Omega_R \hookrightarrow \Omega_S$.

Teorema 4.2.8. *Sea S/R una extensión de Galois de anillos con grupo Γ.*

(a) *Los invariantes de la acción de Γ en Ω_S son las imágenes por χ de los elementos de Ω_R.*

(b) *Manteniendo la notación d_S para la derivación universal $S \to \Omega_S$, los invariantes de la acción de Γ del submódulo $d_S(S)$ son las imágenes por d_S de los elementos de R, es decir $\big(d_S(S)\big)^\Gamma = d_S(R) = \chi(d_R(R))$.*

Demostración. (a)

$$(\Omega_S)^\Gamma \simeq^{\text{Lema 4.2.6}} (\Omega_R \otimes_R S)^\Gamma =^{\text{Teo 4.1.2}} \Omega_R \otimes_R 1 \simeq \Omega_R$$

(b) Claramente $d_S(R) \subseteq \big(d_S(S)\big)^\Gamma$. Recíprocamente, si $\omega = \sum_i \lambda_i d_S(s_i) \in (d_S(S))^\Gamma$, resulta que para todo $\gamma \in \Gamma$ se tiene que ${}^\gamma\omega = \omega$. Entonces

$$\omega = {}^\gamma\omega = \sum_{\gamma\in\Gamma}\sum_i \lambda_i d_S({}^\gamma s_i) = \sum_i \lambda_i d_S\big(\sum_{\gamma\in\Gamma} {}^\gamma s_i\big) = \sum_i \lambda_i d_S\big(\sum_{\gamma\in\Gamma} \underbrace{\pi(s_i)}_{\in R}\big) \in d_S(R)$$

$\square$

Consideremos ahora los cocientes $\Omega_R/d_R(R)$ y $\Omega_S/d_S(S)$.

Lema 4.2.9. *Existe una única acción de Γ en $\Omega_S/d_S S$ tal que*

$${}^\gamma(\overline{s d_S t}) = \overline{{}^\gamma s d_S {}^\gamma t}$$

Demostración. Como ${}^\gamma(d_S t) = d_S {}^\gamma t \in d_S S$, la acción del Lema 4.2.5 pasa al cociente. $\square$

Sean $\pi_R : \Omega_R \to \Omega_R/d_S(R)$ y $\pi_S : \Omega_S \to \Omega_S/d_S(S)$ las proyecciones canónicas. El siguiente paso es relacionar ambos cocientes (a partir de χ). Como $(\pi_S \circ \chi)(d_R(r)) = 0$, existe un único morfismo $\widetilde{\chi} : \Omega_R/d_R(R) \to \Omega_S/d_S(S)$ que hace que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
\Omega_R \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\pi_R"] & \Omega_S \arrow[d, "\pi_S"] \\
\Omega_R/d_R(R) \arrow[r, "\widetilde{\chi}"] & \Omega_S/d_S(S)
\end{tikzcd}$$

conmute. Además $\widetilde{\chi}$ es inyectivo: para $\omega \in \Omega_R$

$$\overline{\omega} \in \mathrm{Ker}(\widetilde{\chi}) \Leftrightarrow \widetilde{\chi}(\overline{\omega}) = \overline{0} \Leftrightarrow (\pi_S \circ \chi)(\omega) = \overline{0} \Leftrightarrow \chi(\omega) \in d_S(S)$$

Pero como $\chi(\omega) = \chi({}^{\gamma}\omega) = {}^{\gamma}\chi(\omega)$ para todo $\gamma \in \Gamma$, resulta que $\chi(\omega) \in \big(d_S(S)\big)^{\Gamma}$, es decir $\omega \in d_R(R)$. Esto nos permite ver $\Omega_R/d_R(R) \hookrightarrow \Omega_S/d_S(S)$.

Teorema 4.2.10. *Sea S/R una extensión de Galois con grupo Γ. Los invariantes por la acción de Γ en $\Omega_S/d_S(S)$ definida en el Lema 4.2.9 son los elementos de $\Omega_R/d_R(R)$, es decir*

$$\big(\Omega_S/d_S(S)\big)^{\Gamma} \simeq \Omega_R/d_R(R)$$

Demostración. Consideremos la sucesión exacta corta

$$0 \to d_S(S) \to \Omega_S \to \Omega_S/d_S(S) \to 0$$

Es claro que tomando invariantes tenemos la sucesión exacta

$$0 \to (d_S(S))^{\Gamma} \to (\Omega_S)^{\Gamma} \to (\Omega_S/d_S(S))^{\Gamma}$$

pero la última flecha puede no ser sobreyectiva. Consideremos el espacio de cohomología

$$H^1(\Gamma, d_S(S)) = \{u : \Gamma \to d_S(S) : u_{\gamma\sigma} = u_{\gamma} + {}^{\gamma}(u_{\sigma})\}/_{\sim}$$

para la relación $u \sim u' \Leftrightarrow \exists\ x \in d_S(S) :\ \forall\ \gamma \in \Gamma\ u'_{\gamma} = -x + u_{\gamma} + {}^{\gamma}x$. Notemos que corresponde a la Definición 3.3.1 con notación abeliana. Definamos un morfismo δ que nos dará una sucesión exacta

$$0 \to (d_S(S))^{\Gamma} \to (\Omega_S)^{\Gamma} \to (\Omega_S/d_S(S))^{\Gamma} \xrightarrow{\delta} H^1(\Gamma, d_S(S))$$

Para $\overline{x} \in (\Omega_S/d_S(S))^{\Gamma}$ tomaremos como $\delta(\overline{x})$ la clase en $H^1(\Gamma, d_S(S))$ del cociclo $u : \Gamma \to d_S(S)$ tal que para cada $\gamma \in \Gamma$

$$u_{\gamma} = -x + {}^{\gamma}x$$

Es directo verificar que está bien definido: en primer lugar, como $\overline{x} \in (\Omega_S/d_S(S))^{\Gamma}$, para todo $\gamma \in \Gamma$ tenemos que ${}^{\gamma}\overline{x} - \overline{x} = 0$, entonces $-x + {}^{\gamma}x \in d_S(S)$. Por otro lado, si $\overline{x} = \overline{x'}$ y definimos los respectivos cociclos u y u', estos serán cohomólogos, pues para cada $\gamma \in \Gamma$

$$u_{\gamma} - u'_{\gamma} = -x + {}^{\gamma}x + x' - {}^{\gamma}x' = -(x - x') + {}^{\gamma}(x - x')$$

Finalmente vemos que realmente se trata de un cociclo, pues

$$u_{\gamma} + {}^{\gamma}u_{\sigma} = -x + {}^{\gamma}x + {}^{\gamma}(-x + {}^{\sigma}x) = -x + {}^{\gamma}x - {}^{\gamma}x + {}^{\gamma\sigma}x = u_{\gamma\sigma}$$

También es directo verificar que la sucesión es exacta: si $x \in (\Omega_S)^\Gamma$, $\delta(\overline{x}) = 0$, pues $x = {}^\gamma x$ para todo $\gamma \in \Gamma$. Recíprocamente, si $\overline{x} \in \operatorname{Ker}(\delta)$, el cociclo que define es nulo, es decir para todo $\gamma \in \Gamma$ $-x + {}^\gamma x = 0$, por lo tanto $x \in (\Omega_S)^\Gamma$.

Ahora bien, es bien sabido que por ser Γ finito, $H^1(\Gamma, d_S(S))$ es un grupo de torsión (ver [Se, Capítulo 1, §2 Corolario 3]), pero también es un k-espacio vectorial para k un cuerpo de característica 0, por lo que $H^1(\Gamma, d_S(S)) = 0$. Por lo tanto

$$\left(\Omega_S/d_S(S)\right)^\Gamma \simeq (\Omega_S)^\Gamma/(d_S(S))^\Gamma$$

Este hecho, en conjunto con el Teorema 4.2.8 nos da el resultado del teorema. $\square$

Capítulo 5

Descenso de Formas Bilineales Invariantes

El objetivo de este capítulo es poder describir la naturaleza del espacio de formas bilineales invariantes de ciertas álgebras, dadas por descenso fielmente playo, desde un marco functorial, con el fin de concluir la existencia y la naturaleza de las formas invariantes en varios casos de interés.

5.1 Funciones invariantes

Salvo que se mencione otra cosa, k es un anillo conmutativo con 1, $R \in k$-**alg**, M es un R-módulo, V es un k-módulo y B es una R-álgebra arbitraria (no necesariamente asociativa, unitaria...), es decir $(R, B) \in k$-**ALG**. Nuestro objetivo es estudiar las funciones bilineales invariantes de $B \times B \to V$. Empecemos con las definiciones necesarias.

Definición 5.1.1 (Funciones (R, k)-bilineales). Una función k-bilineal $\beta : M \times M \to V$ se dice (R, k)-*bilineal* si $\beta(rm_1, m_2) = \beta(m_1, rm_2)$ se cumple para todo $m_i \in M$ y todo $r \in R$. Denotamos $\mathscr{L}^2_{(R,k)}(M; V)$ al R-módulo de funciones (R, k)-bilineales de $M \times M \to V$, donde su estructura de R-módulo está dada por $(r\beta)(m_1, m_2) = \beta(rm_1, m_2)$ para $r \in R$ y $\beta \in \mathscr{L}^2_{(R,k)}(M; V)$. Abreviamos $\mathscr{L}^2_R(M) = \mathscr{L}^2_{(R,R)}(M; R)$. Tenemos el diagrama conmutativo de isomorfismos R-lineales

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_k(M \otimes_R M, V) \arrow[rr, "\mathsf{x}", "\simeq"'] \arrow[dr, "\simeq", "\mathsf{y}"'] & & \mathscr{L}^2_{(R,k)}(M; V) \\
& \mathrm{Hom}_R\big(M, \mathrm{Hom}_k(M, V)\big) \arrow[ur, "\simeq", "\mathsf{z}"'] &
\end{tikzcd} \tag{5.1.1}$$

(ver [B:A, II, §4.1]), donde

$$\big(\mathsf{x}(\varphi)\big)(m_1, m_2) = \varphi(m_1 \otimes m_2)$$

$$\big(\mathsf{y}(\varphi)\big)(m_1)(m_2) = \varphi(m_1 \otimes m_2)$$

$$\big(\mathsf{z}(\psi)\big)(m_1, m_2) = \big(\psi(m_1)\big)(m_2)$$

para $\varphi \in \mathrm{Hom}_k(M \otimes_R M, V)$ y para $\psi \in \mathrm{Hom}_R\big(M, \mathrm{Hom}_k(M, V)\big)$.

Decimos que $\beta \in \mathscr{L}^2_{(R,k)}(M; k)$ es *no degenerada* (respectivamente *no singular*) si $\mathsf{z}^{-1}(\beta) \in \mathrm{Hom}_R(M, M^*)$, $M^* = \mathrm{Hom}_k(M, k)$, es inyectiva (respectivamente biyectiva). Es decir, $\beta \in \mathscr{L}^2_{(R,k)}(M; k)$ es no degenerada si y solo si $\beta(b, M) = 0$ implica que $b = 0$. Por la asimetría en la definición, técnicamente deberíamos hablar de no degenerada o no singular "a izquierda" o "a derecha", pero no será importante en nuestro caso, ya que centraremos nuestro interés en formas bilineales invariantes en álgebras perfectas, que son simétricas. Si k es un cuerpo y B es de dimensión finita, obviamente una forma es no degenerada si y solo si es no singular, pues en espacios vectoriales de dimensión finita una tranformación lineal $\mathsf{z}^{-1}(\beta) : B \to B^*$ es inyectiva si y solo si es biyectiva.

Definición 5.1.2 (Funciones Invariantes). Decimos que $\beta \in \mathscr{L}^2_{(R,k)}(B; V)$ es *invariante* si para todo $a, b, c \in B$

$$\beta(ab, c) = \beta(a, bc) = \beta(b, ca)$$

Llamemos $\mathrm{IBF}_{(R,k)}(B; V)$ al conjunto de todas las funciones invariantes (R, k)-bilineales $B \times B \to V$. Es un submódulo del R-módulo $\mathscr{L}^2_{(R,k)}(B; V)$. Los siguientes casos serán de nuestro particular interés:

$$\begin{aligned} \mathrm{IBF}_k(B; V) &:= \mathrm{IBF}_{(k,k)}(B; V), \\ \mathrm{IBF}_{(R,k)}(B) &:= \mathrm{IBF}_{(R,k)}(B; k), \\ \mathrm{IBF}_k(B) &:= \mathrm{IBF}_k(B; k) = \mathrm{IBF}_{(k,k)}(B). \end{aligned}$$

Llamamos *formas k-bilineales invariantes* a los elementos de $\mathrm{IBF}_k(B)$ y será de particular interés el caso $k = R$ de las formas R-bilineales invariantes en B.

Observación 5.1.3. Tal como comentamos anteriormente, si B es perfecta ($B = BB$), toda forma bilineal invariante es simétrica: $\beta(ab, c) = \beta(b, ca) = \beta(bc, a) = \beta(c, ab)$. Es más, cualquier forma k-bilineal es (R, k)-bilineal, es decir: si B es perfecta tenemos

$$\mathrm{IBF}_k(B; V) = \mathrm{IBF}_{(R,k)}(B; V)$$

porque $\beta\big(r(ab), c\big) = \beta\big(a(rb), c\big) = \beta\big(a, (rb)c\big) = \beta\big(a, b(rc)\big) = \beta\big(ab, rc\big)$.

Definición 5.1.4 (Función invariante Universal). Sea $\mathbf{IBF}_R(B)$ el cociente del R-módulo $B \otimes_R B$ por el submódulo

$$\begin{aligned}\mathsf{ibf}_R(B) &= \mathrm{Span}_R\{ab \otimes c - a \otimes bc,\ ab \otimes c - b \otimes ca : a, b, c \in B\} \\ &= \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}\{ab \otimes c - a \otimes bc,\ ab \otimes c - b \otimes ca : a, b, c \in B\} \\ &= \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}\{ab \otimes c - a \otimes bc,\ a \otimes bc - bc \otimes a : a, b, c \in B\},\end{aligned}$$

donde la última igualdad se sigue de $a\otimes bc - bc\otimes a = (a\otimes bc - ab\otimes c) + (ab\otimes c - b\otimes ca) + (b\otimes ca - bc\otimes a)$ y $ab\otimes c - b\otimes ca = (ab\otimes c - a\otimes bc) + (a\otimes bc - bc\otimes a) + (bc\otimes a - b\otimes ca)$.

Si denotamos $i_B : \mathsf{ibf}_R(B) \to B \otimes_R B$ a la inclusión y q_B a la proyección canónica al cociente

$$q_B : B \otimes_R B \to \mathbf{IBF}_R(B), \quad a \otimes b \mapsto \overline{a \otimes b},$$

tenemos una sucesión exacta de R-módulos

$$0 \to \mathsf{ibf}_R(B) \xrightarrow{i_B} B \otimes_R B \xrightarrow{q_B} \mathbf{IBF}_R(B) \to 0. \tag{5.1.2}$$

Definamos ahora una función R-bilineal invariante

$$\beta_{\mathsf{uni}} : B \times B \to \mathbf{IBF}_R(B), \quad \beta_{\mathsf{uni}}(a, b) = \overline{a \otimes b},$$

que llamaremos *función R-bilineal invariante universal*. Es universal en el sentido que tenemos el isomorfismo natural de R-módulos

$$\mathrm{Hom}_k(\mathbf{IBF}_R(B), V) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{IBF}_{(R,k)}(B; V), \quad f \mapsto \tilde{f} = f \circ \beta_{\mathsf{uni}}. \tag{5.1.3}$$

Su inversa es

$$\mathrm{IBF}_{(R,k)}(B; V) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Hom}_k(\mathbf{IBF}_R(B), V), \quad \beta \mapsto \bar{\beta} \tag{5.1.4}$$

que a cada $\beta \in \mathrm{IBF}_{(R,k)}(B, V)$ le asigna el único morfismo k-lineal

$$\bar{\beta} : \mathbf{IBF}_R(B) \to V \quad \text{tal que} \quad \bar{\beta}(\overline{a \otimes b}) = \beta(a, b). \tag{5.1.5}$$

Es fácil verificar que son inversas entre sí, pues para todo $\beta \in \mathrm{IBF}_{(R,k)}(B; V)$, resulta que $\bar{\beta} \circ \beta_{\mathsf{uni}} = \beta$. El isomorfismo (5.1.3) indica que el functor $\mathrm{IBF}(B; -) : k\text{-}\mathbf{mod} \to R\text{-}\mathbf{mod}$ está representado por $\mathbf{IBF}_R(B)$.

Es de nuestro interés caracterizar $\mathrm{IBF}_{(R,k)}(B; V)$ y una de las formas de hacerlo será a través de algún elemento de $\mathrm{IBF}_R(B)$, con el siguiente principio:

Principio-IBF 5.1.5. *Sea B una R-álgebra para $R \in k$-$\mathbf{alg}$. Supongamos que existe $\beta \in \mathrm{IBF}_R(B)$ tal que el morfismo inducido $\bar{\beta} : \mathbf{IBF}_R(B) \to R$, $\overline{b_1 \otimes b_2} \mapsto \beta(b_1, b_2)$ es un isomorfismo de R-módulos* (ver (5.1.5)). Entonces para cualquier k-módulo V el morfismo

$$\mathrm{Hom}_k(R, V) \to \mathrm{IBF}_{(R,k)}(B; V), \quad \varphi \mapsto \varphi \circ \beta$$

es un isomorfismo de R-módulos. En particular,

(a) El morfismo $R^* = \mathrm{Hom}_k(R,k) \to \mathrm{IBF}_{(R,k)}(B)$, $\varphi \mapsto \varphi \circ \beta$ es un isomorfismo.

(b) Cada $\rho \in \mathrm{IBF}_R(B)$ es de la forma $\rho = r\beta$ para un único $r \in R$.

Demostración. Si existe $\beta \in \mathrm{IBF}_R(B)$ tal que $\bar{\beta} : \mathbf{IBF}_R(B) \to R$ es un isomorfismo de R-módulos, entonces se tiene el isomorfismo

$$\mathrm{Hom}_k(R,V) \to \mathrm{Hom}_k(\mathbf{IBF}_R(B),V) \quad \varphi \mapsto \varphi \circ \bar{\beta}.$$

Componiendo con (5.1.3) y considerando nuevamente que $\beta = \bar{\beta} \circ \beta_{\mathsf{uni}}$ obtenemos el isomorfismo deseado. Para (a) simplemente tomamos $V = k$. Para (b) tomamos $k = R = V$ y componemos con el isomorfismo de R-módulos $R \simeq \mathrm{Hom}_R(R,R)$. Así obtenemos un isomorfismo de R-módulos $R \to \mathrm{IBF}_R(B)$ tal que $r \mapsto r\beta$. $\square$

Diremos que (B,β) satisface el *Principio-IBF* si se cumple la hipótesis (y por lo tanto la tesis) de 5.1.5. En ese caso tendremos una descripción explícita de todas las funciones invariantes (R,k)-bilineales en B.

Otra forma de estudiar las funciones bilineales invariantes es mediante el concepto de *Centroide* definido en la Sección 2.4. Nos dará una herramienta para caracterizar el módulo $\mathrm{IBF}_{(R,k)}(B)$ y en particular, cuando el álgebra B sea central, $\mathrm{IBF}_{(R,k)}(B)$ será un R-módulo libre de rango 1.

Lema 5.1.6 (Relación entre funciones Bilineales Invariantes y el Centroide). *La restricción del isomorfismo* z *de* (5.1.1) *a* $\mathrm{Ctd}_R\big(B, \mathrm{Hom}_k(B,V)\big)$ *induce un isomorfismo R-lineal* $\mathrm{Ctd}_R(B,\mathrm{Hom}_k(B,V)) \simeq \mathrm{IBF}_{(R,k)}(B;V)$. *En particular,*

$$\mathrm{Ctd}_R(B,B^*) \simeq \mathrm{IBF}_{(R,k)}(B). \tag{5.1.6}$$

Demostración. Basta probar que dado $\chi \in \mathrm{Hom}_R\big(B, \mathrm{Hom}_k(B,V)\big)$

$$\chi \in \mathrm{Ctd}_R(B,\mathrm{Hom}_k(B,V)) \Leftrightarrow \mathsf{z}(\chi) \in \mathrm{IBF}_{(R,k)}(B;V)$$

Ahora bien,

$$\begin{aligned}
\chi \in \mathrm{Ctd}_R(B,\mathrm{Hom}_k(B,V)) &\Leftrightarrow \chi(b_1b_2)(b_3) = (b_1 \cdot \chi(b_2))(b_3) = (\chi(b_1)\cdot b_2)(b_3) \\
&\quad\ \text{para todo } b_1,b_2,b_3 \in B \\
&\Leftrightarrow \chi(b_1b_2)(b_3) = \chi(b_2)(b_3b_1) = \chi(b_1)(b_2b_3) \\
&\quad\ \text{para todo } b_1,b_2,b_3 \in B \\
&\Leftrightarrow \mathsf{z}(\chi)(b_1b_2,b_3) = \mathsf{z}(\chi)(b_2,b_3b_1) = \mathsf{z}(\chi)(b_1,b_2b_3) \\
&\quad\ \text{para todo } b_1,b_2,b_3 \in B \\
&\Leftrightarrow \mathsf{z}(\chi) \in \mathrm{IBF}_{(R,k)}(B;V)
\end{aligned}$$

$\square$

Corolario 5.1.7. *Sea* $\beta \in \mathrm{IBF}_{(R,k)}(B)$ *no singular. Entonces*

$$\mathrm{Ctd}_R(B) \simeq \mathrm{IBF}_{(R,k)}(B) \qquad (\textit{isomorfismo de } R\textit{-módulos}).$$

Si además B *es una* R*-álgebra central, entonces* $\mathrm{IBF}_{(R,k)}(B)$ *es un* R*-módulo libre de rango* 1 *que admite como base a* β*, es decir*

$$\mathrm{IBF}_{(R,k)}(B) = R\beta \simeq R.$$

Demostración. Por hipótesis $\chi_\beta = \mathsf{z}^{-1}(\beta) \in \mathrm{Ctd}_R(B, B^*)$ es un isomorfismo de R-módulos, que induce un isomorfismo $\mathrm{Ctd}_R(B, B^*) \simeq \mathrm{Ctd}_R(B, B_{\mathrm{reg}}) = \mathrm{Ctd}_R(B)$ dado por $\chi \in \mathrm{Ctd}_R(B) \mapsto \chi_\beta \circ \chi \in \mathrm{Ctd}_R(B, B^*)$. Ciertamente es un isomorfismo de $\mathrm{Hom}_R(B, B_{\mathrm{reg}})$ a $\mathrm{Hom}_R(B, B^*)$ y cumple que $\chi \in \mathrm{Ctd}_R(B) \Leftrightarrow \chi_\beta \circ \chi \in \mathrm{Ctd}_R(B, B^*)$. Componiendo con el morfismo (5.1.6), se tiene que $\mathrm{IBF}_{(R,k)}(B) \simeq \mathrm{Ctd}_R(B, B^*) \simeq \mathrm{Ctd}_R(B)$. Si además R es central, completamos con $\mathrm{Ctd}_R(B) \simeq R$. En este caso, vía los isomorfismos mencionados tenemos que $1_R \mapsto \mathrm{Id}_B \mapsto \chi_\beta = \mathsf{z}^{-1}(\beta) \mapsto \beta$. Como 1_R es una base de R, β es una base de $\mathrm{IBF}_{(R,k)}(B)$. □

5.2 Naturaleza functorial de IBF

Al igual que en las secciones anteriores, k es un anillo conmutativo con 1 y $R \in k$-**alg**. En esta sección describiremos la naturaleza functorial de **IBF** y su comportamiento por cambio de base.

Sea $(\alpha, f) : (R, M) \to (S, N)$ un morfismo en k-**MOD** (ver 3.6.1) - i.e., $\alpha : R \to S$ es un morfismo en k-**alg** y $f : M \to N$ es α-semilineal - y sea V un k-módulo. Entonces para cualquier $\kappa \in \mathscr{L}^2_{(S,k)}(N; V)$ el morfismo

$$f^*(\kappa) : M \times M \to V, \quad (m_1, m_2) \mapsto \kappa\big(f(m_1), f(m_2)\big)$$

es (R, k)-bilineal. De esta manera obtenemos un morfismo k-lineal

$$f^* : \mathscr{L}^2_{(S,k)}(N; V) \to \mathscr{L}^2_{(R,k)}(M; V), \quad \kappa \mapsto f^*(\kappa).$$

Si $(\beta, g) : (S, N) \to (T, P)$ es otro morfismo en k-**MOD**, es inmediato que $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$. Con una definición análoga para $(\alpha, f) : (R, A) \to (S, B)$ un morfismo en k-**ALG**, también es inmediato que si $\kappa \in \mathrm{IBF}_{(S,k)}(B, V)$, resulta que $f^*(\kappa) \in \mathrm{IBF}_{(R,k)}(A, V)$

Lema 5.2.1. *Sea* $(\alpha, f) : (R, M) \to (S, N)$ *un morfismo en* k-**MOD** *tal que* $f : M \to N$ *es isomorfismo y sea* V *un* k*-módulo. Entonces si* $\kappa \in \mathscr{L}^2_{(S,k)}(N; V)$ *es no singular (respectivamente no degenerada)* $f^*(\kappa)$ *es no singular (respectivamente no degenerada).*

Demostración. Veamos primero que si $\mathsf{z}^{-1}(\kappa) \in \mathrm{Hom}_S\big(N, \mathrm{Hom}_k(N,V)\big)$ es inyectiva, entonces $\mathsf{z}^{-1}\big(f^*(\kappa)\big) \in \mathrm{Hom}_R\big(M, \mathrm{Hom}_k(M,V)\big)$ lo es. Para $x, x' \in M$, supongamos que $\mathsf{z}^{-1}\big(f^*(\kappa)\big)(x) = \mathsf{z}^{-1}\big(f^*(\kappa)\big)(x)$. Entonces para cualquier $y \in M$ tenemos que

$$\begin{aligned}\mathsf{z}^{-1}\big(f^*(\kappa)\big)(x)(y) = \mathsf{z}^{-1}\big(f^*(\kappa)\big)(x')(y) &\Leftrightarrow (f^*(\kappa))(x,y) = (f^*(\kappa))(x',y) \\ \kappa(f(x), f(y)) = \kappa(f(x'), f(y)) &\Leftrightarrow \mathsf{z}^{-1}(\kappa)(f(x))(f(y)) = \mathsf{z}^{-1}(\kappa)(f(x'))(f(y))\end{aligned}$$

Ahora bien, f es isomorfismo, así que $N = f(M)$, por lo que resulta $\mathsf{z}^{-1}(\kappa)(f(x)) = \mathsf{z}^{-1}(\kappa)(f(x'))$. Como $\mathsf{z}^{-1}(\kappa)$ es inyectiva tenemos que $f(x) = f(x')$, y por ser f inyectiva es que $x = x'$.

Ahora veamos que si $\mathsf{z}^{-1}(\kappa) \in \mathrm{Hom}_S\big(N, \mathrm{Hom}_k(N,V)\big)$ es sobreyectiva, entonces $\mathsf{z}^{-1}\big(f^*(\kappa)\big) \in \mathrm{Hom}_R\big(M, \mathrm{Hom}_k(M,V)\big)$ lo es. Sea $\varphi \in \mathrm{Hom}_k(M,V)$. Al ser f un isomorfismo k-lineal, tenemos $\varphi \circ f^{-1} \in \mathrm{Hom}_k(N,V)$. Como $\mathsf{z}^{-1}(\kappa)$ es sobreyectiva, existe un $y \in N$ tal que $\mathsf{z}^{-1}(\kappa)(y) = \varphi \circ f^{-1}$. Entonces $\mathsf{z}^{-1}\big(f^*(\kappa)\big)(x) = \varphi$ para $x = f^{-1}(y)$, porque para cualquier $w \in M$

$$\begin{aligned}\mathsf{z}^{-1}\big(f^*(\kappa)\big)(x)(w) = (f^*(\kappa))(x,w) = \kappa(f(x), f(w)) = \kappa(y, f(w)) &= \mathsf{z}^{-1}(\kappa)(y)(f(w)) \\ &= \varphi \circ f^{-1}(f(w)) = \varphi(w)\end{aligned}$$

□

Definición 5.2.2 (Cambio de Base). Sea $\kappa : M \times M \to R$ una R-forma bilineal y sea $\alpha : R \to S$ un morfismo en k-**alg**. Existe una única forma S-bilineal

$$\kappa_\alpha : M \otimes_\alpha S \times M \otimes_\alpha S \to S$$

que cumple

$$\kappa_\alpha(m_1 \otimes s_1, m_2 \otimes s_2) = \alpha\big(\kappa(m_1, m_2)\big) s_1 s_2$$

Si α se sobreentiende, lo denotamos simplemente κ_S y decimos que es el *cambio de base de κ por S*. En ese caso tenemos $\kappa_S(m_1 \otimes s_1, m_2 \otimes s_2) = \kappa(m_1, m_2) s_1 s_2$.

El cambio de base también se entiende en términos del isomorfismo

$$\mathsf{x} : \mathrm{Hom}_R(M \otimes_R M, R) \xrightarrow{\simeq} \mathscr{L}^2_R(M)$$

de (5.1.1). Si consideramos $\mathsf{x}^{-1}(\kappa) = \tilde{\kappa} : M \otimes_R M \to R$, el morfismo R-lineal asociado a κ, podemos obtener $\mathsf{x}^{-1}(\kappa_S) = \widetilde{\kappa_S}$ componiendo $\tilde{\kappa} \otimes \mathrm{Id}_S$ con los isomorfismos canónicos de S-módulos que se ven en el siguiente diagrama

(5.2.1)
$$\begin{tikzcd}
(M \otimes_R S) \otimes_S (M \otimes_R S) \arrow[r, "\widetilde{\kappa_S}"] \arrow[d, "\simeq"'] & S \arrow[d, "\simeq"] \\
(M \otimes_R M) \otimes_R S \arrow[r, "\tilde{\kappa} \otimes \mathrm{Id}_S"] & R \otimes_R S
\end{tikzcd}$$

Lema 5.2.3. (a) (Transitividad del cambio de base) *Sean* $\kappa \in \mathscr{L}_R^2(M)$, $R \xrightarrow{\alpha} S \xrightarrow{\beta} T$ *morfismos en* k-**alg**, *y* $\zeta : (M \otimes_\alpha S) \otimes_\beta T \to M \otimes_{\beta\circ\alpha} T$, $m \otimes s \otimes t \mapsto m \otimes \big(\beta(s)\big)t$ *el isomorfismo canónico de* T*-módulos. Entonces*

$$\zeta^* \kappa_{\beta\circ\alpha} = (\kappa_\alpha)_\beta. \tag{5.2.2}$$

(b) *Sean* M *y* N R*-módulos,* $\lambda \in \mathscr{L}_R^2(N)$, $f : M \to N$ *un morfismo* R*-lineal y* $\alpha : R \to S$ *un morfismo en* k-**alg**. *Entonces*

$$\big(f^*(\lambda)\big)_\alpha = (f \otimes \mathrm{Id}_S)^*(\lambda_\alpha). \tag{5.2.3}$$

(c) *Sean* $\kappa, \kappa' \in \mathscr{L}_R^2(M)$. *Entonces* $\kappa = \kappa'$ *si y solo si* $\kappa_S = \kappa'_S$ *para alguna extensión fielmente playa* $S \in R$-**alg**.

(d) *Supongamos que* M *es finitamente presentado, y sean* $\kappa \in \mathscr{L}_R^2(M)$ *y* $S \in R$-**alg** *tal que* S *es un* R*-módulo playo. Si* κ *es no degenerada (resp. no singular), entonces* κ_S *es no degenerada (resp. no singular). La recíproca vale en ambos casos si* S/R *es una extensión fielmente playa.*

Demostración. La demostración de (a) se sigue directamente de las definiciones:

$$\begin{aligned}
\zeta^* \kappa_{\beta\circ\alpha}(m \otimes s \otimes t, m' \otimes s' \otimes t') &= \kappa_{\beta\circ\alpha}(\zeta(m \otimes s \otimes t), \zeta(m' \otimes s' \otimes t')) \\
&= \kappa_{\beta\circ\alpha}(m \otimes \beta(s)t, m'\beta(s')t') \\
&= (\beta \circ \alpha)(\kappa(m, m'))\beta(s)\beta(s')tt' \\
&= \beta(\kappa_\alpha(m \otimes s, m' \otimes s'))tt' \\
&= (\kappa_\alpha)_\beta(m \otimes s \otimes t, m' \otimes s' \otimes t')
\end{aligned}$$

Lo mismo ocurre con (b):

$$\begin{aligned}
(f^*(\lambda))_\alpha(m \otimes s, m' \otimes s') &= \alpha\big((f^*(\lambda))(m, m')\big)ss' \\
&= \alpha\big(\lambda(f(m), f(m'))\big)ss' \\
&= \lambda_\alpha(f(m) \otimes s, f(m') \otimes s') \\
&= \lambda_\alpha((f \otimes \mathrm{Id})(m \otimes s), (f \otimes \mathrm{Id})(m' \otimes s')) \\
&= (f \otimes \mathrm{Id})^*(\lambda_\alpha)(m \otimes s, m' \otimes s')
\end{aligned}$$

Para (c) una implicación es trivial, con $R = S$. Recíprocamente, supongamos que para cierta extensión fielmente playa S/R se cumple $\kappa_S = \kappa'_S$, entonces, siguiendo con la notación de la Definición 5.2.2, $\widetilde{\kappa}_S = \widetilde{\kappa}'_S$. Por (5.2.1) resulta $\widetilde{\kappa} \otimes Id_S = \widetilde{\kappa}' \otimes Id_S$. Pero como S/R es fielmente playa resulta $\widetilde{\kappa} = \widetilde{\kappa}'$ y por lo tanto $\kappa = \kappa'$. Para (d), como M es finitamente presentado y S es un R-módulo playo, el morfismo canónico de la

Proposición 2.1.2, $\omega : \mathrm{Hom}_R(M,R) \otimes_R S \to \mathrm{Hom}_S(M \otimes_R S, S)$, es un isomorfismo. Recordando la función $\mathsf{z}^{-1}(\kappa) : M \to \mathrm{Hom}_R(M,R)$ de (5.1.1), resulta que el diagrama

$$\begin{tikzcd}
M \otimes_R S \arrow[rr, "\mathsf{z}^{-1}(\kappa)\otimes \mathrm{Id}_S"] \arrow[dr, "\mathsf{z}^{-1}(\kappa_S)"'] & & \mathrm{Hom}_R(M,R) \otimes_R S \arrow[dl, "\omega"] \\
& \mathrm{Hom}_S(M \otimes_R S, S) &
\end{tikzcd}$$

es conmutativo, pues

$$\begin{aligned}
\big((\omega \circ (\mathsf{z}^{-1}(\kappa) \otimes \mathrm{Id}_S))(m \otimes s)\big)(m' \otimes s') &= \big(\omega(\mathsf{z}^{-1}(\kappa)(m) \otimes s)\big)(m' \otimes s') \\
&= \mathsf{z}^{-1}(\kappa)(m)(m')ss' \\
&= \kappa(m,m')ss' = \kappa_S(m \otimes s, m' \otimes s') \\
&= \big(\mathsf{z}^{-1}(\kappa_S)(m \otimes s)\big)(m' \otimes s')
\end{aligned}$$

Si ahora κ es no degenerada (resp. no singular), es decir $\mathsf{z}^{-1}(\kappa)$ inyectiva (resp. biyectiva), por ser S un R-módulo playo, también lo será $\mathsf{z}^{-1}(\kappa)\otimes \mathrm{Id}_S$. Como ω es biyectiva y el diagrama es conmutativo, resulta que $\mathsf{z}^{-1}(\kappa_S)$ es inyectiva (resp. biyectiva), es decir κ_S es no degenerada (resp. no singular) . Y en el caso de una extensión fielmente playa, vale la recíproca. □

Observación 5.2.4. Se sigue directamente de la definición que si $\kappa \in \mathrm{IBF}_R(B)$ entonces $\kappa_S \in \mathrm{IBF}_S(B)$. Del Lema 5.2.3 (c) se sigue además que en el caso en que S/R es fielmente playa vale la recíproca, pues si consideramos para cada $b \in B$ las formas bilineales

$$_b\kappa : B \times B \to R \quad \text{tal que} \quad {_b\kappa}(a,c) = \kappa(ab,c)$$

y

$$\kappa_b : B \times B \to R \quad \text{tal que} \quad \kappa_b(a,c) = \kappa(a,bc)$$

resultará que $({_b\kappa})_S = (\kappa_b)_S$, por lo que ${_b\kappa} = \kappa_b$ para todo $b \in B$.

Proposición 5.2.5 (IBF e ibf vistos como functores). (a) *Sea $(\alpha, f) : (R,B) \to (S,C)$ un morfismo en k-**ALG**. El morfismo*

$$f \otimes f : B \otimes_R B \to C \otimes_S C, \quad b_1 \otimes b_2 \mapsto f(b_1) \otimes f(b_2)$$

es α-semilineal y aplica $\mathsf{ibf}_R(B)$ en $\mathsf{ibf}_S(C)$, definiendo una función restringida que denotaremos $\mathsf{ibf}_\alpha(f) : \mathsf{ibf}_R(B) \to \mathsf{ibf}_S(C)$. También está bien definida $\mathbf{IBF}_\alpha(f) : \mathbf{IBF}_R(B) \to \mathbf{IBF}_S(C)$, el morfismo inducido en los cocientes.

(b) *La asignación*

$$(R,B) \to \big(R, \mathbf{IBF}_R(B)\big) \quad y \quad (\alpha, f) \mapsto \big(\alpha, \mathbf{IBF}_\alpha(f)\big)$$

define un functor $\mathbf{IBF} : k\text{-}\mathbf{ALG} \to k\text{-}\mathbf{MOD}$ *sobre* k-**alg** *que es estable por cambio de base en el sentido de la Definición* 3.6.5.

(c) *La asignación*

$$(R,B) \to \big(R, \mathsf{ibf}_R(B)\big) \quad y \quad (\alpha, f) \mapsto \big(\alpha, \mathsf{ibf}_\alpha(f)\big)$$

define un functor $\mathsf{ibf} : k\text{-}\mathbf{ALG} \to k\text{-}\mathbf{MOD}$ *sobre* k-**alg** *que es estable por cambio de base en el caso en que la extensión es playa.*

Demostración. La demostración de (a) es directa por la definición de ibf. Veamos (b) y (c) al mismo tiempo. Es directo por definición que **IBF** y ibf son functores sobre k-**alg**. Ya vimos en el Ejemplo 3.6.6 que $B \mapsto B \otimes_R B$ y $(\alpha, f) \mapsto (\alpha, f \otimes f)$ define un functor sobre k-**alg** que es estable por cambio de base. Recordemos que para un morfismo $\alpha : R \to S$, tenemos el isomorfismo

$$\nu_{B,\alpha} : (B \otimes_R B) \otimes_R S \to (B \otimes_R S) \otimes_S (B \otimes_R S), \quad b_1 \otimes b_2 \otimes s \mapsto b_1 \otimes 1_R \otimes b_2 \otimes s.$$

En lo siguiente abreviamos $\nu = \nu_{B,\alpha}$. Trabajando la idea de cambio de base en el functor **IBF** lo que tenemos es un morfismo

$$\bar{\nu} = \bar{\nu}_{B,\alpha} : \mathbf{IBF}_R(B) \otimes_\alpha S \to \mathbf{IBF}_S(B \otimes_\alpha S) \quad \overline{b_1 \otimes b_2} \otimes s \mapsto \overline{b_1 \otimes 1_R \otimes b_2 \otimes s}.$$

Así obtenemos el diagrama con filas exactas

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r, dashed, "(c)"] & \mathsf{ibf}_R(B) \otimes_R S \arrow[r, "i_B \otimes \mathrm{Id}_S"] \arrow[d, dashed] & (B \otimes_R B) \otimes_R S \arrow[r, "q_B \otimes \mathrm{Id}_S"] \arrow[d, "\nu", "\simeq"'] & \mathbf{IBF}_R(B) \otimes_R S \arrow[r] \arrow[d, "\bar{\nu}"] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathsf{ibf}_S(B \otimes_R S) \arrow[r, "i_{B \otimes_R S}"] & (B \otimes_R S) \otimes_S (B \otimes_R S) \arrow[r, "q_{(B \otimes_R S)}"] & \mathbf{IBF}_S(B \otimes_R S) \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

donde la fila de arriba se obtiene de tensorizar (5.1.2) con S y la de abajo es (5.1.2) para $B \otimes_R S$. Con las hipótesis de (c), es decir si S/R es playa, $i_B \otimes \mathrm{Id}_S$ es inyectiva. Esto se muestra con una línea punteada en la parte superior izquierda del diagrama. Veamos que ν aplica el S-submódulo $(i_B \otimes \mathrm{Id}_S)(\mathsf{ibf}_R(B) \otimes_R S)$ de $(B \otimes_R B) \otimes S$ sobre $\mathsf{ibf}_S(B \otimes_R S) \subset (B \otimes_R S) \otimes_S (B \otimes_R S)$, pues $(i_B \otimes \mathrm{Id}_S)(\mathsf{ibf}_R(B) \otimes_R S)$ está generado sobre S por elementos del tipo

$$(ab \otimes c) \otimes 1_S - (a \otimes bc) \otimes 1_S, \quad (ab \otimes c) \otimes 1_S - (b \otimes ca) \otimes 1_S$$

con $a, b, c \in B$. El isomorfismo ν lo aplica al conjunto generado por

$$(ab\otimes 1_S)\otimes_S(c\otimes 1_S)-(a\otimes 1_S)\otimes_S(bc\otimes 1_S), \quad (ab\otimes 1_S)\otimes_S(c\otimes 1_S)-(b\otimes 1_S)\otimes_S(ca\otimes 1_S)$$

en el S-módulo $\mathsf{ibf}_S(B\otimes_R S)$. Ahora bien: todo $\mathsf{ibf}_S(B\otimes_R S)$ está generado sobre S por elementos del tipo

$$\begin{aligned}
&\big((a\otimes s_1)(b\otimes s_2)\big)\otimes_S(c\otimes s_3)-(a\otimes s_1)\otimes_S\big((b\otimes s_2)(c\otimes s_3)\big)\\
&=(ab\otimes s_1s_2)\otimes_S(c\otimes s_3)-(a\otimes s_1)\otimes_S(bc\otimes s_2s_3)\\
&=(a\otimes 1_S)\otimes_S(c\otimes s_1s_2s_3)-(a\otimes s_1)\otimes_S(bc\otimes s_1s_2s_3)\\
&=\big((ab\otimes 1_S)\otimes_S(c\otimes 1_S)-(a\otimes 1_S)\otimes_S(bc\otimes_R 1_S)\big)s_1s_2s_3
\end{aligned}$$

y por

$$\begin{aligned}
&\big((a\otimes s_1)(b\otimes s_2)\big)\otimes_S(c\otimes s_3)-(b\otimes s_2)\otimes_S\big((c\otimes s_3)(a\otimes s_1)\big)\\
&=\big((ab\otimes 1_S)\otimes_S(c\otimes 1_S)-(b\otimes 1_S)\otimes_S(ca\otimes 1_S)\big)s_1s_2s_3.
\end{aligned}$$

Así que está generado por elementos

$$(ab\otimes 1_S)\otimes_S(c\otimes 1_S)-(a\otimes 1_S)\otimes_S(bc\otimes 1_S)=\nu\big((ab\otimes c-a\otimes bc)\otimes 1_S\big)$$

y

$$(ab\otimes 1_S)\otimes_S(c\otimes 1_S)-(b\otimes 1_S)\otimes_S(ca\otimes 1_S)=\nu\big((ab\otimes c-b\otimes ca)\otimes 1_S\big)$$

Por lo tanto la restricción de ν induce un isomorfismo de S-módulos entre $(i_B\otimes \mathrm{Id}_S)(\mathsf{ibf}_R(B)\otimes_R S)$ y $\mathsf{ibf}_S(B\otimes_R S)$. Es directo de la definición de ν y $\overline{\nu}$ que la parte derecha del diagrama es conmutativa, por lo que, mediante la técnica de "diagram chasing", se ve que $\overline{\nu}$ es un isomorfismo y en el caso que S sea un R-módulo playo, la línea punteada vertical también lo será.

□

Corolario 5.2.6. *Sea A una k-álgebra y B una S/R-forma de $A\otimes_k R$, siendo $u\in \mathbf{Aut}(A)(S'')$ el cociclo que determina B. Si denotamos por $\nu:\mathbf{IBF}_k(A)\otimes_k S''\to \mathbf{IBF}_{S''}(A\otimes_k S'')$ el isomorfismo* (3.6.3) *para $F=\mathbf{IBF}$, tenemos que $\mathbf{IBF}_R(B)$ es una S/R-forma de $\mathbf{IBF}(A\otimes_k R)$ que es isomorfa como R-módulo al dado por el cociclo $\nu^{-1}\circ\mathbf{IBF}(u)\circ\nu$.*

Demostración. Como en la Proposición 5.2.5 vimos que **IBF** es un functor sobre k-**alg**, el resultado surge de aplicar directamente el Teorema 3.6.7 a $F=\mathbf{IBF}$. □

Observación 5.2.7. Si en el corolario anterior tomamos $k=R$, tenemos el resultado aplicado a una R-álgebra arbitraria A.

Lema 5.2.8. *Sea B una R-álgebra, $\beta \in \mathrm{IBF}_R(B)$ y $S \in R$-**alg**.*

(a) *Si denotamos por $\nu : \mathbf{IBF}_R(B) \otimes_R S \to \mathbf{IBF}_S(B \otimes_R S)$ el isomorfismo* (3.6.3) *para $F = \mathbf{IBF}$, $\bar\beta : \mathbf{IBF}_R(B) \to R$ y $\overline{(\beta_S)}$ los morfismos* (5.1.5) *asociados a las formas bilineales β y β_S, tenemos que, luego de identificar $R \otimes_R S = S$, $\bar\beta \otimes \mathrm{Id}_S = \overline{(\beta_S)} \circ \nu$:*

$$\begin{tikzcd} \mathbf{IBF}_R(B) \otimes_R S \arrow[r, "\bar\beta\otimes\mathrm{Id}_S"] \arrow[d, "\nu"', "\simeq"] & R \otimes_R S \arrow[d, equal] \\ \mathbf{IBF}_S(B \otimes_R S) \arrow[r, "\overline{(\beta_S)}"] & S \end{tikzcd}$$

(b) *Supongamos que además B es playo como R-módulo. Si (B, β) cumple el Principio-IBF 5.1.5, entonces también lo cumple (B_S, β_S). Y la recíproca es cierta si S/R es una extensión fielmente playa.*

Demostración. La parte (a) es immediata de las definiciones:

$$\begin{aligned}(\overline{\beta_S} \circ \nu)(\overline{b \otimes b'} \otimes s) &= \overline{\beta_S}(\overline{b \otimes 1_S \otimes b' \otimes s}) \\ &= \beta_S(b \otimes 1_S, b' \otimes s) = \beta(b, b')s \leftrightarrow \beta(b, b') \otimes s \\ &= \bar\beta(\overline{b \otimes b'}) \otimes s = (\bar\beta \otimes \mathrm{Id}_S)(\overline{b \otimes b'} \otimes s)\end{aligned}$$

Para (b), si $\bar\beta$ es un isomorfismo, por ser una extensión playa, también lo es $\bar\beta \otimes \mathrm{Id}_S$. De (a) sabemos entonces que $\overline{\beta_S}$ lo es. Y en el caso de extensiones fielmente playas, vale la recíproca. □

5.3 Descenso de formas bilineales

En esta sección estudiaremos el descenso de formas bilineales cuando A es una k-álgebra y B es una S/R-forma torcida de $A \otimes_k R$. Específicamente pediremos

$$(5.3.1) \qquad \begin{cases} A \text{ es una } k\text{-álgebra;} \\ R \in k\text{-}\mathbf{alg} \text{ es tal que } R \text{ es un } k\text{-módulo playo;} \\ S \in R\text{-}\mathbf{alg} \text{ es tal que } S/R \text{ es una extensión fielmente playa;} \\ B \text{ es una } R\text{-álgebra que es una } S/R\text{-forma torcida de } A \otimes_k R. \end{cases}$$

Nos interesa conocer completamente todas las formas k-bilineales en B. En principio tendremos las formas k-bilineales $B \times B \to R$, pero con ayuda del Principio-IBF 5.1.5 y del Lema 5.2.8 tendremos caracterizado $\mathrm{IBF}_{(R,k)}(B; V)$ para cualquier V. Nuestro interés estará en $V = k$, motivado por la teoría de Lie de dimensión infinita.

Supongamos que tenemos κ una forma k-bilineal en A. Siguiendo la Definición 3.6.2, construimos $\kappa_S \in \mathscr{L}^2_S(A \otimes_k S)$. Vía el isomorfismo θ podemos considerar

$\theta^*(\kappa_S) \in \mathscr{L}^2_S(B \otimes_R S)$. Nos preguntamos si tenemos definida de alguna manera natural una forma R-bilineal κ_B en B tal que, mediante el cambio de base S/R, se verifique $(\kappa_B)_S = \theta^*(\kappa_S)$. Veremos que esto es posible si suponemos que κ es invariante por automorfismos de álgebras. Definamos mejor este concepto:

Definición 5.3.1 (Invariancia por Automorfismos). Recordemos $\mathbf{Aut}(B)$, el functor definido en la sección 2.5. Decimos que $\beta \in \mathscr{L}^2_R(B)$ es $\mathbf{Aut}(B)$-*invariante* si $f^*(\beta_S) = \beta_S$ para toda $S \in R$-**alg** y toda $f \in \mathbf{Aut}(B)(S)$. Recordemos una vez más que $f^*(\beta_S)(b_1 \otimes s_1, b_2 \otimes s_2) = \beta_S\big(f(b_1 \otimes s_1), f(b_2 \otimes s_2)\big)$. Es decir que β es $\mathbf{Aut}(B)$-invariante si y solo si β_S es $\mathrm{Aut}_S(B \otimes_R S)$-invariante (en el sentido usual) para toda $S \in R$-**alg**.

La invariancia por automorfismos se comporta bien respecto del cambio de base y del descenso fielmente playo:

Lema 5.3.2. *Sea B una R-álgebra, $\beta \in \mathscr{L}^2_R(B)$ y $S \in R$-**alg**. Si β es $\mathbf{Aut}(B)$-invariante, entonces β_S es $\mathbf{Aut}(B \otimes_R S)$-invariante. Y vale la recíproca si S/R es fielmente playa.*

Demostración. Empezamos con una observación general:
(I) Si T es una extensión de S, el isomorfismo canónico de T-álgebras

$$\zeta : (B \otimes_R S) \otimes_S T \to B \otimes_R T$$

del Lemma 5.2.3(a) induce un isomorfismo de grupos

$$\mathrm{Aut}_T\big((B \otimes_R S) \otimes_S T\big) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{Aut}_T(B \otimes_R T), \quad f \mapsto \zeta \circ f \circ \zeta^{-1}$$

(viendo T como objeto en R-**alg** del modo obvio). Como $(\zeta^{-1})^*\big((\beta_S)_T\big) = \beta_T$ por (5.2.2), se sigue que $(\beta_S)_T$ es $\mathrm{Aut}_T\big((B \otimes_R S) \otimes_S T\big)$-invariante si y solo si β_T es $\mathrm{Aut}_T(B \otimes_R T)$-invariante.

Es inmediato de (I) que si β es $\mathbf{Aut}(B)$-invariante, β_S es $\mathbf{Aut}(B \otimes S)$-invariante, pues esto último consiste en verificar que para cualquier T, $(\beta_S)_T$ es $\mathrm{Aut}_T\big((B \otimes_R S) \otimes_S T\big)$-invariante.

Supongamos ahora que S/R es fielmente playa y β_S es $\mathbf{Aut}(B \otimes_R S)$-invariante. Para probar que β es $\mathbf{Aut}(B)$-invariante, sea $U \in R$-**alg** y $f \in \mathbf{Aut}(B)(U)$. Buscamos ver que $f^*(\beta_U) = \beta_U$. Por el Lema 5.2.3(c), bastará hallar una extensión T/U fielmente playa en la cual $\big(f^*(\beta_U)\big)_T = (\beta_U)_T \in \mathscr{L}^2_T\big((B \otimes_R U) \otimes_U T\big)$. Notemos que la extensión $T = S \otimes_R U$ de U es fielmente playa, pues S/R lo es. (Ver [B:AC, Capítulo I, §3.2 Proposición 4]). Como β_S es $\mathbf{Aut}(B \otimes_R S)$-invariante, resulta para cualquier extensión (en particular para T), que $(\beta_S)_T$ es $\mathrm{Aut}_T(B \otimes_R S \otimes_S T)$-invariante. Por (I), β_T es $\mathrm{Aut}_T(B \otimes_R T)$-invariante. Aplicando otra vez (I) (ahora la recíproca), con el isomorfismo $\zeta' : (B \otimes_R U) \otimes_U T \to B \otimes_R T$, tenemos que $(\beta_U)_T$ es $\mathrm{Aut}_T(B \otimes_R U \otimes_U T)$-invariante, por lo que $(f \otimes \mathrm{Id}_T)^*\big((\beta_U)_T\big) = (\beta_U)_T$. Pero recordando (5.2.3) tenemos que $\big(f^*(\beta_U)\big)_T = (f \otimes \mathrm{Id}_T)^*\big((\beta_U)_T\big)$, lo que completa la demostración de la igualdad $\big(f^*(\beta_U)\big)_T = (\beta_U)_T$ □

Teorema 5.3.3 (Descenso de formas Aut-invariantes). *Supongamos que estamos en la situación de descenso (5.3.1) planteada al principio de la sección: A es una k-álgebra, $R \in k$-**alg** es playo, B es una R-álgebra que es una forma torcida de $A \otimes_k R$. Sea $\kappa \in \mathscr{L}^2_k(A)$ una forma bilineal $\mathbf{Aut}(A)$-invariante.*

(a) *Existe una única forma R-bilineal $\kappa_B \in \mathscr{L}^2_R(B)$ tal que $(\kappa_B)_S = \theta^*(\kappa_S)$ para S/R fielmente playa y $\theta : B \otimes_R S \to A \otimes_k S$ isomorfismo de S-álgebras. Además resulta κ_B $\mathbf{Aut}(B)$-invariante.*

(b) *Si κ es invariante, entonces también lo es κ_B.*

(c) *Si A es finitamente presentada y κ es no degenerada (resp. no singular), entonces también lo es κ_B.*

Demostración. (a) Fijemos S y θ como en (a). Sea $\alpha : R \to S$ el morfismo de estructura y κ_S el cambio de base de κ en S. Antes de continuar observemos que

(5.3.2) *Si $\beta : S \to T$ es un morfismo en k-**alg**, entonces* $(\mathrm{Id}_A \otimes \beta)^*(\kappa_T) = \beta \circ \kappa_S$.

pues para todo $x, x' \in A$ y todo $s, s' \in S$ tenemos que

$$\begin{aligned}\kappa_T\big((\mathrm{Id}_A \otimes\beta)(x \otimes s), (\mathrm{Id}_A \otimes\beta)(x' \otimes s')\big) &= \kappa_T\big(x \otimes \beta(s), x' \otimes \beta(s')\big)\\ &= \kappa(x, x')\beta(s)\beta(s') = \beta\big(\kappa(x, x')ss'\big)\\ &= \beta\big(\kappa_S(x \otimes s, x' \otimes s')\big)\end{aligned}$$

Empecemos por mostrar la existencia de una forma R-bilineal $\kappa_B^\theta \in \mathscr{L}^2_R(B)$ que cumple $(\kappa_B^\theta)_S = \theta^*(\kappa_S)$. La notación κ_B^θ indica que, en principio, esa forma podría depender de θ (y también de S). De acuerdo con lo visto en el Teorema 3.2.5 el cociclo correspondiente al isomorfismo de S-álgebras θ^{-1} es $u = \theta_2 \circ \theta_1^{-1}$ y tenemos que

$$\theta(B \otimes 1) = \{x \in A \otimes_k S : u\big((\mathrm{Id}_A \otimes p_1)(x)\big) = (\mathrm{Id}_A \otimes p_2)(x)\}. \tag{5.3.3}$$

Si identificamos $B \subset B \otimes_R S$ vía $b \mapsto b \otimes 1$ veremos que la restricción de $\theta^*(\kappa_S)$ a $B \times B$, que a priori toma valores en S, realmente toma valores en R. Es decir, para $b, b' \in B$ y $x = \theta(b), x' = \theta(b') \in A \otimes_k S$ tenemos que $\theta^*(\kappa_S)(b, b') = \kappa_S(x, x') \in R$.

Por el Teorema 2.2.8 debemos ver que $p_1\big(\theta^*(\kappa_S)(b,b')\big) = p_2\big(\theta^*(\kappa_S)(b,b')\big)$. Teniendo en mente (5.3.2), (5.3.3) y la invariancia por automorfismos de $\kappa_{S''}$, vemos que

$$\begin{aligned}
p_1\big(\theta^*(\kappa_S)(b,b')\big) &= p_1\big(\kappa_S(x,x')\big) = \kappa_{S''}\big((\mathrm{Id}_A \otimes p_1)(x), (\mathrm{Id}_A \otimes p_1)(x')\big)\\
&= \kappa_{S''}\Big(u\big((\mathrm{Id}_A \otimes p_1)(x)\big), u\big((\mathrm{Id}_A \otimes p_1)(x')\big)\Big)\\
&= \kappa_{S''}\big((\mathrm{Id}_A \otimes p_2)(x), (\mathrm{Id}_A \otimes p_2)(x')\big)\\
&= p_2\big(\kappa_S(x,x')\big) = p_2\big(\theta^*(\kappa_S)(b,b')\big).
\end{aligned}$$

Así es que la restricción de κ_B^θ de $\theta^*(\kappa_S)$ a B es una forma R-bilineal en B. Por definición y considerando que κ_S y θ son S-lineales tenemos que $(\kappa_B^\theta)_S = \theta^*(\kappa_S)$, pues

$$\begin{aligned}
(\kappa_B^\theta)_S(b \otimes s, b' \otimes s') &= \kappa_B^\theta(b,b')ss' = \kappa_S(\theta(b \otimes 1), \theta(b' \otimes 1))ss'\\
&= \kappa_S(\theta(b \otimes s), \theta(b' \otimes s')) = \theta^*(\kappa_S)(b \otimes s, b' \otimes s')
\end{aligned}$$

Lo siguiente que debemos hacer es ver que κ_B^θ no depende del isomorfismo θ y de S. Para eso supongamos que ahora tenemos otra extensión fielmente playa U/R con morfismo de estructura $\alpha' : R \to U$, y con un isomorfismo $\theta' : B \otimes_R U \to A \otimes_k U$ de U-álgebras. Por lo visto recién, tenemos una forma R-bilineal $\kappa_B^{\theta'}$ que cumple que $(\kappa_B^{\theta'})_U = (\theta')^*(\kappa_U)$, debemos ver que $\kappa_B^\theta = \kappa_B^{\theta'}$. Para ver esto, usaremos otra vez el Lema 5.2.3(c). Consideramos el álgebra $T = S \otimes_R U$ que podemos ver como S- y como U-álgebra, con morfismos de estructura que llamamos β y β' respectivamente. Denotemos momentaneamente por $\rho : k \to R$ el morfismo de estructura $\sigma_{R,k}$ de R. Tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
 & & S \arrow[dr, "\beta"] & \\
k \arrow[r, "\rho"] & R \arrow[ur, "\alpha"] \arrow[dr, "\alpha'"'] & & T \\
 & & U \arrow[ur, "\beta'"'] &
\end{tikzcd}$$

Notemos que T es fielmente playo sobre S, U y R. (Aplicando [B:AC, Capítulo I, §3.2 Proposición 4 y 7])

Sea $\xi : (A \otimes_{\alpha\circ\rho} S) \otimes_\beta T \to A \otimes_{\beta\circ\alpha\circ\rho} T = A \otimes_k T$ el isomorfismo canónico de T-álgebras, y definamos $\tilde{\theta} : A \otimes_{\beta\circ\alpha\circ\rho} T \to B \otimes_{\beta\circ\alpha} T$ como la composición

$$\tilde{\theta} : \; A \otimes_{\beta\circ\alpha\circ\rho} T \xrightarrow{\xi^{-1}} (A \otimes_{\alpha\circ\rho} S) \otimes_\beta T \xrightarrow{(\theta\otimes\mathrm{Id})^{-1}} (B \otimes_\alpha S) \otimes_\beta T \xrightarrow{\zeta} B \otimes_{\beta\circ\alpha} T\,.$$

Entonces $\tilde{\theta}^*$ aplica $(\kappa_B^\theta)_{\beta\circ\alpha} \in \mathscr{L}_T^2(B \otimes_{\beta\circ\alpha} T)$ sobre una forma bilineal en $\mathscr{L}_T^2(A \otimes_k T)$. De hecho,

$$\begin{aligned}
\tilde{\theta}^*\big((\kappa_B^\theta)_{\beta\circ\alpha}\big) &= (\zeta \circ (\theta^{-1} \otimes \mathrm{Id}) \circ \xi^{-1})^* \left((\kappa_B^\theta)_{\beta\circ\alpha}\right) = (\xi^{-1\,*} \circ (\theta^{-1} \otimes \mathrm{Id})^* \circ \zeta^*)\,(\kappa_B^\theta)_{\beta\circ\alpha}) \\
&\overset{(5.2.2)}{=} (\xi^{-1\,*} \circ (\theta^{-1} \otimes \mathrm{Id})^*)\,\big(((\kappa_B^\theta)_\alpha)_\beta\big) = (\xi^{-1\,*} \circ (\theta^{-1} \otimes \mathrm{Id})^*)\big((\theta^* \kappa_{\alpha\circ\rho})_\beta\big) \\
&\overset{(5.2.3)}{=} \big(\xi^{-1\,*} \circ (\theta^{-1} \otimes \mathrm{Id})^* \circ (\theta \otimes \mathrm{Id})^*\big)\,\big((\kappa_{\alpha\circ\rho})_\beta\big) = \xi^{-1\,*}\,\big((\kappa_{\alpha\circ\rho})_\beta\big) \\
&\overset{(5.2.2)}{=} \kappa_{\beta\circ\alpha\circ\rho} = \kappa_T.
\end{aligned}$$

Si ahora definimos análogamente $\tilde{\theta}' : A \otimes_k T \to B_{\beta'\circ\alpha'}T$, reemplazando $\theta \otimes \mathrm{Id}$ por $\theta' \otimes \mathrm{Id}$, por simetría tenemos $\big(\tilde{\theta}'^*\big)(\kappa_B^{\theta'})_{\beta'\circ\alpha'} = \kappa_T$. Como κ es $\mathbf{Aut}(A)$-invariante, κ_T es $\mathrm{Aut}_T(A \otimes_k T)$-invariante. Como $\tilde{\theta}^{-1} \circ \tilde{\theta}' \in \mathbf{Aut}(A)(T)$, tenemos que

$$(\kappa_B^{\theta'})_{\beta'\circ\alpha'} = (\tilde{\theta}')^{-1\,*}(\kappa_T) = \tilde{\theta}^{-1\,*}(\kappa_T) = (\kappa_B^\theta)_{\beta\circ\alpha}$$

entonces por Lema 5.2.3(c) tenemos $\kappa_B^\theta = \kappa_B^{\theta'}$, lo que nos permite definir $\kappa_B = \kappa_B^\theta$.

Finalmente, veamos que κ_B es $\mathbf{Aut}(B)$-invariante, aplicando el Lema 5.3.2: por hipótesis κ es $\mathbf{Aut}(A)$-invariante $\implies$ κ_S es $\mathbf{Aut}(A \otimes_k S)$-invariante $\implies$ $\theta^*(\kappa_S) = (\kappa_B)_S$ es $\mathbf{Aut}(B \otimes_\alpha S)$-invariante $\implies$ κ_B es $\mathbf{Aut}(B)$-invariante.

(b) κ es invariante, entonces por la Observación 5.2.4, κ_S lo es y por lo tanto también $\theta^*(\kappa_S) = (\kappa_B)_S$. Como S/R es fielmente playa, la Observación 5.2.4 indica que κ_B es invariante.

(c) Como κ es no degenerada (respectivamente no singular), A es finitamente presentada y R/k es playo, el Lema 5.2.3(d) implica que κ_S es no degenerada (respectivamente no singular). Ahora por el Lema 5.2.1, $\theta^*(\kappa_S) = (\kappa_B)$ lo es. Ser finitamente presentado es una propiedad invariante por cambio de base y por descenso fielmente playo (Ver [B:AC, Capítulo I, §3.6 Proposición 11]), por lo que B lo es. Ahora por ser S/R fielmente playa, una nueva aplicación del Lema 5.2.3(d) prueba que κ_B es no degenerada (respectivamente no singular). □

Corolario 5.3.4. *Sea B una S/R-forma de $A \otimes_k R$ tal como se planteó en* (5.3.1). *Supongamos además que A es finitamente presentada como k-módulo y que $\kappa \in$* $\mathrm{IBF}_k(A)$ *es* $\mathbf{Aut}(A)$*-invariante. Sea κ_B la forma R-bilineal en B asociada a κ según el Teorema* 5.3.3. *Si (A, κ) cumple el Principio-IBF, entonces (B, κ_B) también lo cumple.*

Demostración. Por descenso fielmente playo, $\overline{\kappa_B} : \mathbf{IBF}_R(B) \to R$ será un isomorfismo en cuanto verifiquemos que $(\overline{\kappa_B}) \otimes \mathrm{Id}_S$ lo es. Por el Lema 5.2.8(a) aplicado a $\beta = \kappa_B$ tenemos que $(\overline{\kappa_B}) \otimes \mathrm{Id}_S = \overline{(\kappa_B)_S} \circ \nu$, donde ν es un isomorfismo, por lo que solo debemos probar que $\overline{(\kappa_B)_S}$ es un isomorfismo. Primero vemos que $\overline{\theta^*(\kappa_S)} = \overline{\kappa_S} \circ \mathbf{IBF}(\theta)$: sean $b, b' \in B$ y $s, s' \in S$

$$\begin{aligned}\big(\overline{\kappa_S}\circ \mathbf{IBF}(\theta)\big)(\overline{b\otimes s\otimes b'\otimes s'}) &= \overline{\kappa_S}\big(\overline{\theta(b\otimes s)\otimes\theta(b'\otimes s')}\big)\\ &= \kappa_S\big(\theta(b\otimes s),\theta(b'\otimes s')\big)\\ &= \theta^*(\kappa_S)(b\otimes s, b'\otimes s') = \overline{\theta^*(\kappa_S)}(\overline{b\otimes s\otimes b'\otimes s'})\end{aligned}$$

Como θ es un isomorfismo, por functorialidad de **IBF**, resulta que $\mathbf{IBF}(\theta)$ también lo es. Aplicando el Lema 5.2.8(b) a κ, resulta que también $\overline{\kappa_S}$ es un isomorfismo, por lo que $\overline{\theta^*(\kappa_S)} = \overline{\kappa_S}\circ\mathbf{IBF}(\theta)$ es un isomorfismo. Recordemos que según el teorema, $(\kappa_B)_S = \theta^*(\kappa_S)$, por lo que $\overline{(\kappa_B)_S}$ es un isomorfismo y eso completa la demostración.
$\square$

Capítulo 6

Aplicaciones

En este capítulo aplicaremos los resultados vistos anteriormente a las álgebras de Lie y a otros tipos de álgebras. El principal ejemplo de interés es el caso en que $A = \mathfrak{g}$ es una k–álgebra de Lie semisimple de dimensión finita sobre un cuerpo k de característica 0 y B es una forma torcida de $\mathfrak{g} \otimes_k R$. En principio sigamos trabajando con k anillo conmutativo con identidad y $R \in k$-**alg**. Si f es un endomorfismo de un R-módulo finitamente generado y proyectivo, denotamos $\mathrm{tr}(f)$ su traza. Para más detalles acerca de la traza de un endomorfismo ver [B:A, II, §4.3]

6.1 Álgebras de Lie

Empecemos tratando la forma de Killing de un álgebra de Lie $\mathcal{L}$, definida como $\kappa(l_1, l_2) = \mathrm{tr}\big((\mathrm{ad}l_1) \circ (\mathrm{ad}l_2)\big)$ para $l_i \in \mathcal{L}$.

Proposición 6.1.1. *Sea $\mathcal{L}$ una R-álgebra de Lie, que es finitamente generada y proyectiva como R-módulo. Entonces la forma de Killing κ de $\mathcal{L}$ es una forma R-bilineal que es invariante y* $\mathbf{Aut}(\mathcal{L})$*-invariante. Y para cualquier $S \in R$-*$\mathbf{alg}$*, el cambio de base κ_S es la forma de Killing del álgebra de Lie $\mathcal{L} \otimes_R S$.*

Demostración. La demostración es directa considerando la propiedad de la traza de endomorfismos $\mathrm{tr}(f \circ g) = \mathrm{tr}(g \circ f)$ (ver [B:A, II, §4.3 Proposición 3]), que implica la propiedad cíclica: $\mathrm{tr}(f \circ g \circ h) = \mathrm{tr}(h \circ f \circ g) = \mathrm{tr}(g \circ h \circ f)$. Como la forma de Killing es simétrica, para verificar que es invariante basta ver que para todo $x, y, z \in \mathcal{L}$ se cumple que $\kappa([x, y], z) = \kappa(x, [y, z])$. Ahora bien,

$$\begin{aligned}
\kappa([x,y],z) &= tr(\mathrm{ad}[x,y] \circ \mathrm{ad}z) = tr\big((\mathrm{ad}x \circ \mathrm{ad}y - \mathrm{ad}y \circ \mathrm{ad}x) \circ \mathrm{ad}z\big) \\
&= tr((\mathrm{ad}x \circ \mathrm{ad}y \circ \mathrm{ad}z) - tr(\mathrm{ad}y \circ \mathrm{ad}x \circ \mathrm{ad}z) \\
&= tr((\mathrm{ad}x \circ \mathrm{ad}y \circ \mathrm{ad}z) - tr(\mathrm{ad}x \circ \mathrm{ad}z \circ \mathrm{ad}y) \\
&= tr\big((\mathrm{ad}x \circ (\mathrm{ad}y \circ \mathrm{ad}z - \mathrm{ad}z \circ \mathrm{ad}y)\big) = tr(\mathrm{ad}x \circ \mathrm{ad}[y,z]) = \kappa(x,[y,z])
\end{aligned}$$

Esta identidad también implica que κ es $\mathrm{Aut}_R(\mathcal{L})$-invariante. Para $f \in \mathrm{Aut}_R(\mathcal{L})$, $x \in \mathcal{L}$ tenemos que $\mathrm{ad}\big(f(x)\big) = f \circ (\mathrm{ad}x) \circ f^{-1}$ por lo tanto

$$\begin{aligned}\kappa\big(f(x), f(y)\big) &= \mathrm{tr}\left(\mathrm{ad}f(x) \circ \mathrm{ad}f(y)\right) = \mathrm{tr}\left(f \circ (\mathrm{ad}x) \circ (\mathrm{ad}y) \circ f^{-1}\right)\\ &= \mathrm{tr}\left(\mathrm{ad}x \circ \mathrm{ad}y\right) = \kappa(x,y)\end{aligned}$$

Recordemos que las funciones adjuntas de la S-álgebra de Lie $\mathcal{L} \otimes_R S$ son los cambios de base de las adjuntas en $\mathcal{L}$, es decir $\mathrm{ad}_{x\otimes s} = \mathrm{ad}_x \otimes s$. Como además la traza es invariante por cambio de base, resulta que la forma de Killing de $\mathcal{L} \otimes_R S$ es el cambio de base por S de κ, es decir $\kappa_{\mathcal{L}\otimes_R S}(x \otimes s, y \otimes t) = \kappa_S(x \otimes s, y \otimes t) = \kappa(x,y)st$. Ahora κ es $\mathbf{Aut}(\mathcal{L})$-invariante, pues κ_S es la forma de Killing de $\mathcal{L} \otimes_R S$, por lo tanto es $\mathrm{Aut}_S(\mathcal{L} \otimes_R S)$-invariante. □

Corolario 6.1.2. *Supongamos que estamos en la situación de descenso planteada en* (5.3.1)*, donde llamamos $\mathfrak{a}$ a una k-álgebra de Lie que es finitamente presentada y proyectiva como k-módulo. Recordemos que $R \in k$-***alg** *es tal que R/k es playo, $S \in R$-***alg** *es tal que S/R es una extensión fielmente playa y B es una R-álgebra que es una S/R-forma torcida de $\mathfrak{a} \otimes_k R$. Sea κ la forma de Killing de $\mathfrak{a}$. Entonces*

(a) *B es un R-módulo finitamente generado, proyectivo y la única forma R-bilineal κ_B en B asociada a κ como en el Teorema* 5.3.3 *es la forma de Killing del álgebra de Lie B. Y si vemos a B como una R-subálgebra de $\mathfrak{a} \otimes_k S$ mediante un cociclo u, es decir*

$$B = \{x \in \mathfrak{a} \otimes_k S : u\big((\mathrm{Id}_{\mathfrak{a}} \otimes \alpha_1)(x)\big) = (\mathrm{Id}_{\mathfrak{a}} \otimes \alpha_2)(x)\},$$

la forma κ_B es la restricción a B de la forma de Killing κ_S de $\mathfrak{a} \otimes_k S$.

(b) *Si κ es no singular, entonces la forma de Killing de B es no singular.*

(c) *Si κ es no singular y $\mathfrak{a}$ es una k-álgebra central, entonces B es una R-álgebra central y $\mathrm{IBF}_R(B)$ es un R-módulo libre de rango 1 que admite κ_B como base.*

Demostración. (a) Por la Proposición 6.1.1, κ_S es la forma de Killing de la S-álgebra de Lie $\mathfrak{a} \otimes_k S$. Como las propiedades de finitamente generado y proyectivo son estables por cambio de base arbitrario y por descenso fielmente playo, resulta que el R-módulo B es finitamente generado y proyectivo. Si llamamos β a la forma de Killing de B, por la Proposición 6.1.1, β_S es la forma de Killing de $B \otimes_R S$. Sea $\theta : B \otimes_R S \to \mathfrak{a} \otimes_k S$ una trivialización de la forma torcida. Como las formas de Killing se preservan por isomorfismos de álgebras de Lie, resulta que $\beta_S = \theta^*(\kappa_S)$. Por la unicidad en el Teorema 5.3.3, se sigue que $\beta = \kappa_B$. Que κ_B es la restricción de κ_S se sigue de la definición de κ_B en dicho Teorema.

(b) Es directo, por (a) y por el Lema 5.2.3(d). Recordemos (ver [B:AC, Capítulo I, §2.8, Lema 8]) que todo módulo finitamente generado y proyectivo es finitamente presentado.

(c) Como $\mathfrak{a}$ es central, por el Lema 2.4.2 resulta que la S-álgebra $\mathfrak{a} \otimes_k S$ también es central. Ahora por la Proposición 3.4.1, B es R-álgebra central. El resto de las afirmaciones se siguen directamente del Corolario 5.1.7. $\square$

A partir de ahora nos dedicaremos al caso en que k es un cuerpo de característica 0, $\mathfrak{g}$ es una k-álgebra de Lie semisimple, de dimensión finita y consideramos las formas torcidas de $\mathfrak{g} \otimes_k R$ para $R \in k$-**alg**. Notemos que en esa situación podemos encuadrar a las álgebras de multilazos presentadas en la Sección 3.5, en donde k es algebraicamente cerrado, $\mathfrak{g}$ es simple y R es el anillo de Polinomios de Laurent.

Proposición 6.1.3. *Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie semisimple, central, de dimensión finita sobre un cuerpo k de característica* 0*. Entonces la forma de Killing de $\mathfrak{g}$, $\kappa \in \mathrm{IBF}_k(\mathfrak{g})$ es no singular y el Principio-IBF* 5.1.5 *se cumple para $(\mathfrak{g}, \kappa)$.*

Demostración. En principio, por ser $\mathfrak{g}$ semisimple la forma de Killing es no degenerada y en el caso de dimensión finita esto implica que es no singular. Recordemos que para que se cumpla el Principio-IBF debemos ver que $\bar{\kappa}$ de (5.1.5)

$$\bar{\kappa} : \mathbf{IBF}_k(\mathfrak{g}) \to k \quad \text{ tal que } \quad \bar{\kappa}(\overline{x \otimes y}) = \kappa(x, y) \in k$$

es un isomorfismo. Por un lado, es sobreyectiva, porque $\kappa(\mathfrak{g}, \mathfrak{g}) = k$. Llamemos N al núcleo de $\bar{\kappa}$, entonces obtenemos la sucesión exacta corta de k-especios vectoriales

$$0 \to N \to \mathbf{IBF}_k(\mathfrak{g}) \xrightarrow{\bar{\kappa}} k \to 0$$

que da la sucesión exacta corta

$$0 \to \mathrm{Hom}_k(k, k) \xrightarrow{\hat{\kappa}} \mathrm{Hom}_k(\mathbf{IBF}_k(\mathfrak{g}), k) \to \mathrm{Hom}_k(N, k) \to 0$$

donde $\hat{\kappa}(\lambda \,\mathrm{Id}_k) = \lambda \,\mathrm{Id}_k \circ \bar{\kappa} = \lambda \bar{\kappa}$ para $\lambda \in k$. Considerando el isomorfismo canónico $k \simeq \mathrm{Hom}_k(k, k)$, el isomorfismo $\mathrm{IBF}_k(\mathfrak{g}) \simeq k$ dado por el Corolario 5.1.7 (que se puede aplicar, pues tenemos la hipótesis de $\mathfrak{g}$ central) y el isomorfismo (5.1.3) $\mathrm{Hom}_k(\mathbf{IBF}_k(\mathfrak{g}), k) \simeq \mathrm{IBF}_k(\mathfrak{g})$ que aplica $\bar{\kappa}$ a κ, tenemos el diagrama conmutativo

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_k(k, k) \arrow[r, "\hat{\kappa}"] & \mathrm{Hom}_k(\mathbf{IBF}_k(\mathfrak{g}), k) \arrow[d, "\simeq"] \\
k \arrow[u, "\simeq"] \arrow[r, "\simeq"] & \mathrm{IBF}_k(\mathfrak{g})
\end{tikzcd}
\qquad\qquad
\begin{tikzcd}
\lambda \,\mathrm{Id}_k \arrow[r, mapsto] & \lambda \bar{\kappa} \arrow[d, mapsto] \\
\lambda \arrow[u, mapsto] \arrow[r, mapsto] & \lambda \kappa
\end{tikzcd}$$

Esto prueba que $\hat{\kappa}$ es un isomorfismo, lo que hace que $\mathrm{Hom}_k(N, k) = \{0\}$ y así $N = 0$. $\square$

Teorema 6.1.4. *Sea $\mathfrak{g}$ una k-álgebra de Lie semisimple, de dimensión finita sobre un cuerpo k de característica* 0*. Sea B una forma torcida de $\mathfrak{g} \otimes_k R$, para alguna extensión fielmente playa S/R. Entonces*

(a) *B es finitamente generado y proyectivo como R-módulo y perfecta como álgebra de Lie. La forma de Killing de la R-álgebra B coincide con la forma bilineal κ_B asociada a la forma de Killing κ de $\mathfrak{g}$ en el Teorema* 5.3.3*. En particular, la forma de Killing de B es no singular y $\mathbf{Aut}(B)$-invariante. Y si vemos a B como R-subálgebra de $\mathfrak{g} \otimes_k S$, la forma de Killing de B es la restricción a B de la forma de Killing $\kappa_{\mathfrak{g}\otimes S}$.*

(b) *Si además $\mathfrak{g}$ es central, B es una R-álgebra central,* $\mathrm{IBF}_R(B)$ *es un R-módulo libre de rango* 1 *que admite como base a κ_B y (B, κ_B) satisface el Principio-IBF* 5.1.5*.*

Demostración. Como $\mathfrak{g}$ es semisimple, es perfecta (ver [H, Capítulo II §5.2]), es decir $[\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] = \mathfrak{g}$. Como $[\mathfrak{g} \otimes_k S, \mathfrak{g} \otimes_k S] = [\mathfrak{g}, \mathfrak{g}] \otimes_k S$, $\mathfrak{g} \otimes_k S$ es perfecta, y por lo tanto $B \otimes_R S$ lo es. Veamos que en el caso de S/R fielmente playa, esto implica que B es perfecta:

$$(B/[B,B]) \otimes_R S \simeq (B \otimes_R S)/([B,B] \otimes_R S) \simeq (B \otimes_R S)/[B \otimes_R S, B \otimes_R S] = 0$$

Por lo tanto, $B/[B,B] = 0$, es decir $B = [B,B]$. El resto de la parte (a) es directamente el Corolario 6.1.2. Para la parte (b), solo debemos ver que (B, κ_B) satisface el Principio-IBF, pero por el Corolario 5.3.4, basta ver que $(\mathfrak{g}, \kappa)$ lo satisface, y eso es precisamente lo que dice la Proposición 6.1.3.

□

Observación 6.1.5. El álgebra de multilazos vista en la Sección 3.5 cumple con el teorema anterior. El hecho que $(\mathcal{L}, \kappa_{\mathcal{L}})$ cumpla el Principio-IBF nos está diciendo que para cada k-módulo V el morfismo

$$\mathrm{Hom}_k(R, V) \to \mathrm{IBF}_{(R,k)}(B; V), \quad \varphi \mapsto \varphi \circ \kappa_{\mathcal{L}}$$

es un isomorfismo. Es el elemento $\kappa_{\mathcal{L}} \in \mathrm{IBF}_R(\mathcal{L})$ el que nos permite el pasaje de R a k en las conclusiones, salvando el artificio de introducir R para poder estudiar $\mathcal{L}$ como una forma torcida. En particular obtenemos las formas k-bilineales invariantes que toman valores en k mediante

$$R^* = \mathrm{Hom}_k(R, k) \xrightarrow{\simeq} \mathrm{IBF}_k(\mathcal{L})$$

pues, por ser $\mathcal{L}$ perfecta, una función k-bilineal es (R, k)-bilineal. En el próximo capítulo volveremos con este ejemplo, pero ya en la situación de formas bilineales graduadas.

6.2 Aplicación a otros tipos de álgebras

Como para ilustrar la generalidad con la que se trabajó el tema, veamos la aplicación a otros dos ejemplos.

6.2.1 Álgebras unitarias

En esta sección veremos formas bilineales invariantes en un álgebra unitaria B definida sobre algún $R \in k$-**alg**. Para eso definamos el módulo asociador y el módulo conmutador que para B son

$$(B,B,B) = \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}\{(a,b,c) : a,b,c \in B\} \quad \text{y} \quad [B,B] = \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}\{[a,b] : a,b \in B\}$$

respectivamente, donde $(a,b,c) = (ab)c - a(bc)$ es el asociador y $[a,b] = ab - ba$ es el conmutador en B.[1] Por su definición es inmediato que (B,B,B) y $[B,B]$ son R-submódulos de B. Definamos

$$\mathsf{ac}(B) = (B,B,B) + [B,B] \quad \text{y} \quad \mathbb{AC}(B) = B/\mathsf{ac}(B).$$

Como $b\,1_B = b = 1_B\,b$ para todo $b \in B$, resulta que las álgebras unitarias son perfectas. Entonces $\mathrm{IBF}_{(R,k)}(B;V) = \mathrm{IBF}_k(B;V)$ para cualquier k-módulo V por la Observación 5.1.3.

Lema 6.2.1. *Sea B una R-álgebra unitaria. La función multiplicación $\mu : B \otimes_R B \to B$, $\mu(a \otimes b) = ab$, induce un isomorfismo*

$$\bar{\mu} : \mathbf{IBF}_R(B) \to \mathbb{AC}(B), \quad \bar{\mu}(\overline{a \otimes b}) = \overline{ab}$$

con inversa dada por $\bar{a} \mapsto \overline{1 \otimes a} = \overline{a \otimes 1}$. Por lo tanto, para cada k-módulo V el morfismo

$$\mathrm{Hom}_k(\mathbb{AC}(B), V) \to \mathrm{IBF}_k(B;V),$$

que asigna a cada $\varphi \in \mathrm{Hom}_k(\mathbb{AC}(B), V)$ la función bilineal $(a,b) \mapsto \varphi(\overline{ab})$ es un isomorfismo de R-módulos y su inverso es el morfismo que a cada β asigna la función lineal $\bar{b} \mapsto \beta(b,1)$, para cada $b \in B$.

Demostración. Según lo visto en la Definición 5.1.4, $\mathsf{ibf}_R(B)$ está generado por elementos de la forma $ab \otimes c - a \otimes bc$ y $a \otimes b - b \otimes a$. Entonces es claro que $\mu\big(\mathsf{ibf}_R(B)\big) =$

[1] Si B es un álgebra de Lie, el conmutador es el doble del producto en el álgebra, pero esta notación no será un problema, porque la utilizaremos solo en álgebras que no son de Lie.

$\mathsf{ac}(B)$ y por lo tanto $\bar{\mu}$ está bien definida. También es claro que es sobreyectiva. Para ver que es inyectiva consideremos $\nu : B \to B \otimes_k B$ definida por $\nu(a) = 1 \otimes a$. Entonces

$$\nu\big((a,b,c)\big) = 1 \otimes (ab)c - 1 \otimes a(bc) \equiv ab \otimes c - a \otimes bc \equiv 0 \pmod{\mathsf{ibf}_R(B)}, \quad \text{y}$$
$$\nu\big([a,b]\big) = 1 \otimes ab - 1 \otimes ba \equiv a \otimes b - b \otimes a \equiv 0 \pmod{\mathsf{ibf}_R(B)}.$$

Tenemos así un morfismo k-lineal bien definido $\bar{\nu} : \mathbb{AC}(B) \to \mathbf{IBF}_R(B)$ tal que $\bar{\nu}(\bar{b}) = \overline{b \otimes 1} = \overline{1 \otimes b}$. Como

$$(\nu \circ \mu)(a \otimes b) = 1 \otimes ab = (1 \otimes ab - 1a \otimes b) + a \otimes b \equiv a \otimes b \pmod{\mathsf{ibf}_R(B)}$$

$\bar{\nu} \circ \bar{\mu} = \mathrm{Id}_{\mathbf{IBF}(B)}$, entonces $\bar{\mu}$ es inyectiva y por lo tanto biyectiva. Para la última afirmación, el isomorfismo de R-módulos planteado no es otra cosa que aplicar la composición con el isomorfismo $\bar{\mu}$ para conseguir $\mathrm{Hom}_k(\mathbb{AC}(B), V) \simeq \mathrm{Hom}_k(\mathbf{IBF}_R(B), V)$ y luego aplicar (5.1.3). La inversa surge del mismo modo, teniendo en cuenta (5.1.4) y (5.1.5). $\square$

Corolario 6.2.2. *Sea B una R-álgebra unitaria y supongamos que $B = Rb_0 \oplus \mathsf{ac}(B)$ para algún $b_0 \in B$ donde Rb_0 es libre con base $\{b_0\}$. Sea $\pi : B \to R$ tal que $b = \pi(b)b_0 \oplus b_{\mathsf{ac}}$ para $b_{\mathsf{ac}} \in \mathsf{ac}(B)$, y definamos*

$$\beta_0 : B \times B \to R, \qquad \beta_0(a,b) = \pi(ab).$$

Entonces $\beta_0 \in \mathrm{IBF}_R(B)$ y (B, β_0) cumple el Principio-IBF. Además

$$\tilde{\beta}_0 : \mathbb{AC}(B) \to R, \quad \bar{b} \mapsto \beta_0(b,1)$$

es un isomorfismo de R-módulos bien definido.

Demostración. Por su definición, es claro que π es R-lineal, por lo que β_0 es R-bilineal. También es claro que es invariante: $\beta_0(ab,c) = \pi(abc) = \beta_0(a,bc)$ y como $ab - ba \in [B,B] \subseteq \mathsf{ac}(B)$ tenemos que $\pi(ab - ba) = 0$. Así $\beta_0(ab,c) = \pi(abc) = \pi(bca) = \beta_0(b,ca)$.

Por otro lado, de la misma definición de π sabemos que $\pi(\mathsf{ac}(B)) = 0$, por lo que tenemos bien definido el morfismo R-lineal $\tilde{\beta}_0 : \mathbb{AC}(B) \to R$ tal que $\bar{b} \mapsto \pi(b) = \beta_0(b,1)$. Para cada $r \in R$, $\tilde{\beta}_0(\overline{rb_0}) = \pi(rb_0) = r$. Además, si para algún $b \in B$ se cumple que $\tilde{\beta}_0(b) = 0$, es que $\pi(b) = 0$, por lo que $b \in \mathsf{ac}(B)$, es decir $\bar{b} = 0$, por lo que podemos concluir que es un isomorfismo.

Finalmente, (B, β_0) cumple el Principio-IBF, porque el morfismo $\bar{\beta}$ de 5.1.5 no es otra cosa que la composición de $\tilde{\beta}_0$ con el isomorfismo $\bar{\mu}$ del Lema 6.2.1. $\square$

6.2.2 Álgebras de Azumaya

En esta sección abordamos las álgebras de Azumaya, que en el caso de rango constante las podemos encuadrar en la situación de descenso planteada en (5.3.1): k es un anillo de base (conmutativo con identidad), $R \in k$-**alg** es tal que es un k-módulo playo (por ejemplo $k = R$), y $S \in R$-**alg** es una extensión fielmente playa. Consideraremos $A = M_n(k)$. Entonces nuestra S/R-forma B de $M_n(k) \otimes_k R = M_n(R)$ es un álgebra de Azumaya sobre R de rango constante n^2. (Ver [KO, IV, Cor. 6.7]).

Empecemos por recordar algunos hechos de $M_n(k)$: es un álgebra unitaria, por lo tanto perfecta. Además es central, pues en un álgebra B con 1, el centroide $\mathrm{Ctd}_R(B)$ es isomorfo al centro usual de B, que es el conjunto de los elementos $c \in B$ que conmutan con todo $b \in B$, y que asocian con todo $b_1, b_2 \in B$, i.e., $(c, b_1, b_2) = (b_1, c, b_2) = (b_1, b_2, c) = 0$. En este caso, $M_n(k)$ es asociativa, por lo que el centro son aquellos elementos que conmutan con todas las matrices, que es bien sabido que son los múltiplos por escalares de la matriz identidad.

Definiremos en $M_n(k)$ una forma bilineal natural κ que llamaremos simplemente *forma bilineal dada por la traza*, que es

$$\kappa(x, y) = \mathrm{tr}(xy)$$

donde tomamos $\mathrm{tr}(xy)$ la traza usual de la matriz xy. Considerando las propiedades básicas de la traza, es claro que $\kappa \in \mathrm{IBF}_k\big(M_n(k)\big)$ y que es simétrica.

Observación 6.2.3. Dada $K \in k$-**alg**, sabemos que $M_n(k) \otimes_k K \simeq M_n(K)$. Vía este isomorfismo la forma dada por la traza en $M_n(K)$ coincide con la forma κ_K planteada en la Definición 5.2.2.

A continuación veamos algunas propiedades más de κ, resumidas en el siguiente lema.

Lema 6.2.4. *Sea κ la forma dada por la traza de $M_n(k)$. Entonces*

(a) *κ es no singular.*

(b) *κ es $\mathbf{Aut}(M_n(k))$-invariante.*

(c) *$\big(M_n(k), \kappa\big)$ cumple el Principio-IBF.*

Demostración. Para verificar (a) debemos ver que $\mathsf{z}^{-1}(\kappa)$ es biyectiva, lo cual es directo, pues transforma la base canónica de matrices elementales E_{ij} en su base dual.

Para ver que κ es $\mathbf{Aut}(M_n(k))$-invariante, poniendo en consideración la Observación 6.2.3, bastará verificar la invariancia de κ por automorfismos de $M_n(k)$. Sea $\sigma \in \mathrm{Aut}_k(M_n(k))$ y $x, y \in M_n(k)$. Para ver que xy tiene la misma traza que $\sigma(x)\sigma(y)$, basta ver que para cada ideal primo $\mathfrak{p}$ de k los elementos $(xy)_{\mathfrak{p}}$ y $\big(\sigma(x)\sigma(y)\big)_{\mathfrak{p}}$ de

$M_n(k_\mathfrak{p})$ tienen la misma traza. Claramente $(xy)_\mathfrak{p} = x_\mathfrak{p} y_\mathfrak{p}$ y $\big(\sigma(x)\sigma(y)\big)_\mathfrak{p} = \sigma_\mathfrak{p}(x_\mathfrak{p})\sigma_\mathfrak{p}(y_\mathfrak{p})$ donde $\sigma_\mathfrak{p} = \sigma \otimes \mathrm{Id}_{k_\mathfrak{p}}$, por lo que podemos asumir que k es un anillo local. En ese caso, por el teorema de Skolem-Noether para anillos locales ([KO, IV, Cor. 1.3]), σ está dado por la conjugación por una matriz inversible $M \in \mathrm{GL}_n(k)$, entonces $\sigma(x)\sigma(y) = MxyM^{-1}$, por lo que es claro que xy y $\sigma(x)\sigma(y)$ tienen la misma traza.

En cuanto (c), notemos primero que

$$\{x \in M_n(k) : \mathrm{tr}(x) = 0\} = [M_n(k), M_n(k)] = \mathsf{ac}(M_n(k))$$

Claramente los generadores del conmutador tienen traza nula. Recíprocamente, el submódulo de matrices con traza nula está generado por matrices $[E_{ii}, E_{ij}] = E_{ij}$ para $i \neq j$ y $[E_{i1}, E_{1i}] = E_{ii} - E_{11}$ para $1 < i \leq n$. Como $M_n(k)$ es asociativa, se trata del k-submódulo $\mathsf{ac}(M_n(k))$ definido previamente. Ahora, cada $x = \sum_{i,j} x_{ij} E_{ij} \in M_n(k)$ puede escribirse de manera única como

$$x = \big(x_{11} + \sum_{1<i} x_{ii}\big) E_{11} + \sum_{1<i} x_{ii}(E_{ii} - E_{11}) + \sum_{i \neq j} x_{ij} E_{ij} \tag{6.2.1}$$

por lo que

$$M_n(k) = kE_{11} \oplus [M_n(k), M_n(k)]$$

Además la formula (6.2.1) implica que κ es la forma bilineal del Corolario 6.2.2 y por lo tanto $(M_n(k), \kappa)$ cumple el Principio-IBF. $\square$

Teorema 6.2.5. *Sea B una S/R-forma de $M_n(k) \otimes_k R \simeq M_n(R)$ y sea κ_B la forma bilineal asociada según el Teorema* 5.3.3 *a la forma dada por la traza κ de $M_n(k)$. Entonces*

(a) *κ_B es una forma bilineal no singular, invariante,* $\mathbf{Aut}(B)$*-invariante, tal que (B, κ_B) cumple el Principio-IBF* 5.1.5*, en particular, κ_B es una base de* $\mathrm{IBF}_R(B)$.

(b) *Si vemos B como una R-subálgebra de $M_n(S)$, κ_B coincide con la restricción de la forma dada por la traza de $M_n(S)$ a B.*

Demostración. (a) se sigue directo del Teorema 5.3.3 y su Corolario 5.3.4, pues tenemos las hipótesis necesarias por el Lema 6.2.4. En cuanto a (b), usando el hecho que la forma dada por la traza de $M_n(S'')$ es invariante por automorfismos, realizando el mismo razonamiento que en el Teorema 5.3.3, concluimos que la restricción λ de la forma dada por la traza de $M_n(S)$ a B toma valores es R. Como λ_S es la forma dada por la traza de $M_n(S)$, coincide con $(\kappa_B)_S$, entonces por el Lema 5.2.3 (c) resulta $\lambda = \kappa_B$. $\square$

Observación 6.2.6. La forma κ_B resulta ser la "reduced trace form" del álgebra de Azumaya B definida en [KO]. Esto prueba, (sin la construcción del polinomio característico que se muestra en [KO]) que esa forma que a priori toma valores en S, toma valores en R.

Capítulo 7

Formas Bilineales Invariantes Graduadas

En este capítulo clasificamos las formas bilineales invariantes graduadas, que son de particular importancia en la teoría de Lie de dimensión infinita. Empecemos recordando algunas generalidades de graduaciones y formas graduadas. En caso que no se especifique de otra manera, seguimos con la situación ya planteada: k es un anillo (conmutativo con identidad) y $R \in k$-**alg**. Consideremos también Λ un grupo abeliano.

7.1 Generalidades sobre álgebras graduadas

Definición 7.1.1 (Álgebras graduadas y formas bilineales invariantes graduadas). Un *álgebra* Λ*-graduada* es un par $(C, \mathscr{C})$ que consiste en una k-álgebra C y una familia $\mathscr{C} = (C^\lambda)_{\lambda \in \Lambda}$ de k-submódulos C^λ de C que cumplen $C = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} C^\lambda$ y $C^\lambda C^\mu \subset C^{\lambda+\mu}$ para todo $\lambda, \mu \in \Lambda$. Decimos que una k-álgebra C es Λ*-graduada* si $(C, \mathscr{C})$ es un álgebra Λ-graduada para alguna familia $\mathscr{C}$. Observemos que admitimos que algunos submódulos $C^\lambda = 0$.

Supongamos que C es Λ-graduada. Decimos que $\kappa \in \mathscr{L}^2_k(C)$ es una *forma bilineal graduada* si $\kappa(C^\lambda, C^\mu) = 0$ cuando $\lambda + \mu \neq 0$.

Definición 7.1.2 (S/R-formas graduadas). Supongamos de ahora en adelante que $R \in k$-**alg** es Λ-graduada, digamos $R = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} R^\lambda$. Una R-álgebra B es una *R-álgebra* Λ*-graduada* si $B = \bigoplus_{\lambda \in \Lambda} B^\lambda$ es Λ-graduada como k-álgebra y las Λ-graduaciones de R y B son compatibles en el sentido que $R^\lambda B^\mu \subset B^{\lambda+\mu}$ para todo $\lambda, \mu \in \Lambda$. Por ejemplo, para cualquier k-álgebra A la R-álgebra $A \otimes_k R$ está canónicamente Λ-graduada como R-álgebra definiendo los submódulos λ-homogeneos como $(A \otimes_k R)^\lambda = A \otimes_k R^\lambda$.

En la situación de descenso (5.3.1), si suponemos que $R \in k$-**alg** es Λ-graduada y que $S \in R$-**alg** es una R-álgebra Λ-graduada, vemos $A \otimes_k S$ con su graduación canónica. Una S/R-forma B de $A \otimes_k R$ se llama *graduada* si B es una R-álgebra Λ-graduada y existe un isomorfismo de S-álgebras $\theta : B \otimes_R S \to A \otimes_k S$ que respeta la graduación, es decir $\theta(b^\lambda \otimes s^\mu) \in A \otimes_k S^{\lambda+\mu}$ para $b^\lambda \in B^\lambda$ y $s^\mu \in S^\mu$.

7.2 Aplicación a las álgebras de Lie

Especializando en álgebras de Lie, obtenemos una versión graduada del Teorema 6.1.4.

Proposición 7.2.1. *Sea $\mathfrak{g}$ un álgebra de Lie semisimple de dimensión finita sobre un cuerpo k de característica 0 con forma de Killing κ. Sean $R \in k$-**alg** y $S \in R$-**alg** Λ-graduadas, S/R una extensión fielmente playa y B una S/R-forma graduada de $\mathfrak{g} \otimes_k R$.*

(a) *Si κ_B es la forma que corresponde a κ según el Teorema 5.3.3, entonces κ_B es la forma de Killing de la R-álgebra B y cumple que $\kappa_B(B^\lambda, B^\mu) \subset R^{\lambda+\mu}$ para todo $\lambda, \mu \in \Lambda$.*

(b) *Si $\mathfrak{g}$ es central (por lo tanto simple), entonces toda forma bilineal invariante graduada $\beta \in \mathrm{IBF}_k(B)$ puede escribirse como $\varphi \circ \kappa_B$ para un único $\varphi \in \{\varphi \in R^* : \varphi(R^\lambda) = 0$ para $\lambda \neq 0\} \simeq (R^0)^*$.*

Demostración. (a) Que κ_B es la forma de Killing de B ya fue establecido en el Corolario 6.1.2. Como se trata de una S/R- forma graduada, existe un isomorfismo de S-álgebras $\theta : B \otimes_R S \to \mathfrak{g} \otimes_k S$ que respeta las graduaciones. Recordemos que podemos suponer que $B \subset \mathfrak{g} \otimes_k S$ y por lo tanto $B^\lambda = B^\lambda \otimes 1_S \subset \mathfrak{g} \otimes S^\lambda$. Recordemos además, del Corolario 6.1.2, que $\kappa_B = \kappa_{\mathfrak{g}\otimes_k S} |_{B\times B}$ donde $\kappa_{\mathfrak{g}\otimes_k S}$ es la forma de Killing de la S-álgebra $\mathfrak{g} \otimes_k S$ y que $\kappa_{\mathfrak{g}\otimes_k S}$ coincide con el cambio de base κ_S de κ por S. Además observemos que $\kappa_S\big(\mathfrak{g} \otimes_k S^\lambda, \mathfrak{g} \otimes_k S^\mu\big) \subset S^{\lambda+\mu}$, pues para $x \otimes s \in \mathfrak{g} \otimes S^\lambda$, $y \otimes t \in \mathfrak{g} \otimes S^\mu$ tenemos que $\kappa_S(x \otimes s, y \otimes t) = \kappa(x, y)st \in S^{\lambda+\mu}$, por lo que será suficiente probar que $R^\lambda = S^\lambda \cap R$ para todo $\lambda \in \Lambda$. Para esto, como $1_S \in S^0$, resulta que $R^\lambda = R^\lambda 1_S \in R^\lambda S^0 \subset S^\lambda$. Entonces $R^\lambda \subset S^\lambda \cap R$. Para la otra inclusión, dado un $r \in S^\lambda \cap R$, por la graduación de R podemos escribir $r = \sum_{\mu\in\Lambda} r_\mu$ con $r_\mu \in R^\mu$, como $R^\mu \subset S^\mu$ y $r \in S^\lambda$, tenemos que necesariamente $r_\lambda = r$ y $r_\mu = 0$ para $\lambda \neq \mu$.

(b) Sea $R_\kappa = \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}\{\kappa_B(b_1, b_2) : b_i \in B\} \subseteq R$. Veamos que $R_\kappa = R$. Como$(\kappa_B)_S =$

$\theta^*(\kappa_S)$ el diagrama

$$\begin{tikzcd}
B \times B \otimes_R S \arrow[r, "\kappa_B \otimes \mathrm{Id}_S"] \arrow[d, "\simeq"'] & R_\kappa \otimes_R S \arrow[dd] \\
B \otimes_R S \times B \otimes_R S \arrow[d, "\theta\times\theta"'] & \\
\mathfrak{g} \otimes_k S \times \mathfrak{g} \otimes_k S \arrow[r, "\kappa_{\mathfrak{g}\otimes S}"'] & S
\end{tikzcd}$$

conmuta y además $\kappa_{\mathfrak{g}\otimes S}(\mathfrak{g}\otimes_k S, \mathfrak{g}\otimes_k S) = S$, por lo tanto $R_\kappa \otimes_R S \simeq S$. Entonces tenemos que

$$(R/R_\kappa) \otimes_R S \simeq \big(R \otimes_R S\big)\big/\big(R_\kappa \otimes_R S\big) \simeq S\big/\big(R_\kappa \otimes_R S\big) = 0.$$

Como S/R es una extensión fielmente playa, $R/R_\kappa = 0$, así que $R_\kappa = R$. Como κ_B es graduada, tenemos que $R^\lambda = \sum_{\mu\in\Lambda} \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}}\, \kappa_B(B^\mu, B^{\lambda-\mu})$ para cualquier $\lambda \in \Lambda$.

Por lo visto en el Teorema 6.1.4(a), B es perfecta, así que por la Observación 5.1.3 $\mathrm{IBF}_k(B) = \mathrm{IBF}_{(R,k)}(B, k)$. Sea $\beta \in \mathrm{IBF}_k(B)$ una forma bilineal invariante graduada. Aplicando otra vez el Teorema 6.1.4 (b), existe un única $\varphi \in R^*$ tal que $\beta = \varphi \circ \kappa_B$. Veamos que $\varphi(r) = 0$ para todo $r \in R^\lambda$, donde $\lambda \neq 0$. La primera observación de la demostración nos dice que existe una cantidad finita de $b_i \in B^{\mu_i}$ y $b_i' \in B^{\lambda-\mu_i}$ tal que $r = \sum_i \kappa_B(b_i, b_i')$. Por lo tanto

$$\varphi(r) = \sum_i \varphi(\kappa_B(b_i, b_i')) = \sum_i \beta(b_i, b_i') = 0$$

Que, recíprocamente, cada $\varphi \in (R^0)^*$ da una forma bilineal invariante graduada es directo. $\square$

La Proposición 7.2.1 se puede aplicar a las álgebras de multilazos definidas en la Sección 3.5. Para considerarla como un álgebra graduada, consideremos $\Lambda = \frac{1}{m_1}\mathbb{Z}\times\cdots\times\frac{1}{m_n}\mathbb{Z}$, es decir $\Lambda \simeq \mathbb{Z}^n$. Tenemos Λ-graduaciones naturales en S y R (donde los elementos homogeneos de R tienen grados en $\mathbb{Z}\times\cdots\times\mathbb{Z} \subset \Lambda$). De esa manera, el álgebra de Lie $\mathfrak{g}\otimes_k S$ está canónicamente Λ-graduada y de la misma manera lo está $\mathcal{L}$. De la definición de $\mathcal{L}$ y las graduaciones es inmediato que es una R-álgebra graduada y de hecho una S/R-forma de $\mathfrak{g}\otimes_k S$, es decir $R^{(\mu_1,\ldots,\mu_n)}\mathcal{L}^{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)} \subseteq \mathcal{L}^{(\mu_1+\lambda_1,\ldots,\mu_n+\lambda_n)}$ y $\theta(x^{(\mu_1,\ldots,\mu_n)} \otimes s^{(\lambda_1,\ldots,\lambda_n)}) \subseteq \mathfrak{g}\otimes_k S^{(\mu_1+\lambda_1,\ldots,\mu_n+\lambda_n)}$. Para reescribir la Proposición 7.2.1, notemos que en este caso $R^0 = k$. Por lo que obtenemos lo siguiente:

Corolario 7.2.2. *Sea $\mathcal{L}$ un álgebra de multilazos basada en una k-álgebra de Lie simple, de dimensión finita, donde k es un cuerpo algebraicamente cerrado de característica* 0. *Entonces, salvo escalares de k, el álgebra de Lie $\mathbb{Z}^n$-graduada $\mathcal{L}$ tiene una* *única forma k-bilineal invariante graduada β y está dada por*

$$\beta(x \otimes t_1^{\frac{j_1}{m_1}} \dots t_n^{\frac{j_n}{m_n}}, y \otimes t_1^{\frac{l_1}{m_1}} \dots t_n^{\frac{l_n}{m_n}}) = \kappa(x,y)\delta_{j_1+l_1,0} \dots \delta_{j_n+l_n,0} \tag{7.2.1}$$

donde κ es la forma de Killing de $\mathfrak{g}$. Además β es no degenerada.

Demostración. Por el Ejemplo 2.4.1, $\mathfrak{g}$ es central, así que una aplicación directa de la Proposición 7.2.1 nos da que (salvo constantes de $k \simeq k^*$) la única forma bilineal es

$$\kappa_{\mathcal{L}}(x \otimes t_1^{\frac{j_1}{m_1}} \dots t_n^{\frac{j_n}{m_n}}, y \otimes t_1^{\frac{l_1}{m_1}} \dots t_n^{\frac{l_n}{m_n}}) = \kappa(x,y) t_1^{\frac{j_1+l_1}{m_1}} \dots t_n^{\frac{j_n+l_n}{m_n}}$$

pero por la misma proposición es graduada, por lo que es 0 si en algún caso $j_i + l_i \neq 0$, dando la formula (7.2.1). Para ver que β es no degenerada, notemos primero que $\beta_{|\mathcal{L}^\lambda \times \mathcal{L}^{-\lambda}}$ es no degenerada para cada $\lambda \in \Lambda$, porque κ lo es. Esto hace que necesariamente β sea no degenerada. $\square$

Este último corolario es de interés para la construcción de las álgebras de Lie extendidas afines, que depende de la existencia de formas bilineales invariantes graduadas no degeneradas en un álgebra de multilazos. Es así como queda planteado el camino para seguir el estudio de las EALAs en esa dirección.

Referencias

[AABGP] Azem, S. Allison, B. Berman, S. Gao, Y. and Pianzola, A. *Extended affine Lie algebras and their root systems*, Mem. Amer. Math. Soc. **603** (1997) 128 pp.

[ABP2] Allison, B. Berman, S. and Pianzola, A. *Covering algebras II: Loop algebras of Kac-Moody Lie algebras*, Jour. für die reine und angewandte Mathematik (Crelle) **571** (2004) 39-71.

[AM] M. F. Atiyah, I. G. Macdonald *Introdution to Commutative Algebra* Addison-Wesley Series in Mathematics (1969)

[B:A] N. Bourbaki, *Algèbre*, Chapitres 1–3, Diffusion C.C.L.S., Paris 1970.

[B:AC] N. Bourbaki, *Algèbre commutative.* Chapitres 1 à 4. Masson Paris, 1985.

[CHR] S. U. Chase, D. K. Harrison and A. Rosenberg, *Galois theory and cohomology of commutative rings*, Memoirs of the Amer. Math. Soc., No. **5**2, Amer. Math. Soc., Providence, 1965.

[EGA IV] A. Grothendieck (avec la collaboration de J. Dieudonné), *Eléments de Géométrie Algébrique IV*, Publications mathématiques de l'I.H.É.S. no **20**(1964).

[GP] P. Gille and A. Pianzola, *Galois cohomology and forms of algebras over Laurent polynomial rings*, Math. Ann. 338 (2) (2007) 497–543.

[H] Humphreys, James *Introduction to Lie Algebras and Representation Theory*, Springer-Verlag (1972).

[J] Jacobson, N. *Lie algebras*, Dover, New York, 1979.

[KO] M.-A. Knus, and M. Ojanguren, *Théorie de la descente et algèbres d'Azumaya*, Lecture Notes in Mathematics **389**, Springer-Verlag Berlin, 1974, iv+163 pp.

[Ne1] E.Neher, *Lie tori*, C. R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Can. **26** (2004), 84–89.

[Ne2] E.Neher, *Extended affine Lie algebras*, C. R. Math. Acad. Sci. Soc. R. Can. **26** (2004), 90–96.

[Ne3] E.Neher, *Extended affine Lie Algebras – An Introductrion to Their Structure Theory*, in: Geometric representation theory and extended affine Lie algebras, Fields Inst. Commun. **59** (2011), 107–167, Amer. Math. Soc., Providence, RI.

[NP] E. Neher and A. Pianzola, *Étale Descent of Derivations*, Transformation Groups **18** (2013), 1189-1205..

[NPPS] E. Neher, A. Pianzola, D. Prelat, and C. Sepp, *Invariant bilinear forms of algebras given by faithfully flat descent*, Communications in Contemporary Mathematics **17** (2015).

[Pi1] A. Pianzola, *Derivations of certain algebras defined by étale descent*. Math. Z. **264** (2010).

[PPS] A. Pianzola, D. Prelat, and C. Sepp, *Variations on themes of C. Kassel and R. Wilson*, in preparation.

[Se] Serre, J-P. *Cohomologie Galoisienne*, cinquième édition révisée et complétée, Lecture Notes in Math. **5**, Springer-Verlag.

[W] W. Waterhouse, *Introduction to Affine Group Schemes* , Springer (1979)